演習問題 19	制限時間 6 分	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

正の数 a，b を用いて，2 つの式 A，B を次のようにおく。

$A=a+4b$ ……①，$B=\dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{b}$ ……②

このとき，

命題「A，B のうち少なくとも 1 つは 5 以上である。」……$(**)$

が真であることを背理法により示す。まず，

$A<\boxed{\text{ア}}$ かつ $B<\boxed{\text{ア}}$ と仮定すると，

①＋②より，$A+B<\boxed{\text{イウ}}$ ……③ となる。

ここで，相加・相乗平均の不等式より，

$a+\dfrac{9}{a}\geqq\boxed{\text{エ}}$ となり，かつ，

$4b+\dfrac{1}{b}\geqq\boxed{\text{オ}}$ となる。よって，

$A+B\geqq\boxed{\text{カキ}}$ となって，これは③に矛盾する。

以上から，背理法により，命題 $(**)$ は真である。

ヒント！ 命題「q である。」が真であることを示すには，まず「q でない。」と仮定して矛盾を導けばいい。これが，背理法による証明法なんだね。今回の問題では，相加・相乗平均の不等式も利用して解いていこう。

解答＆解説

正の数 a,b を用いて，2 つの式 A,B を次のようにおく。

$A=a+4b$ ……①　　$B=\dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{b}$ ……②

このとき，命題「A，B のうち少なくとも 1 つは 5 以上である。」……$(**)$ が真であることを背理法により示す。

まず，$(**)$ の否定として，

「A，B が共に 5 より小である。」，すなわち，

$$\begin{cases} A=a+4b<5 \quad \text{かつ} \\ B=\dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{b}<5 \quad \text{であると仮定する。}\cdots\cdots\cdots(\text{答})(\text{ア}) \end{cases}$$

ココがポイント

⇦ 命題 $(**)$ の否定は「A，B は共に 5 より小である。」になるんだね。

これらを辺々たし合わせると，

$A+B<5+5$

$\therefore\ A+B<10$ ……③ となる。 ……………(答)(イウ)

ここで，①，②より，

$$\underset{\sim\sim}{A}+\underline{B}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{a+4b}+\underline{\frac{9}{a}+\frac{1}{b}}$$

$$=\underline{a+\frac{9}{a}}+\underline{\underline{4b+\frac{1}{b}}}\quad\cdots\cdots④$$ となる。

ここで，$a>0$，$b>0$ より，相加・相乗平均の不等式を用いると，

⇦ $x>0$ かつ $y>0$ のとき，相加・相乗平均の不等式より，$x+y\geqq2\sqrt{xy}$ となる。(等号成立条件：$x=y$)

$$\underline{a+\frac{9}{a}}\geqq2\sqrt{\cancel{a}\times\frac{9}{\cancel{a}}}=2\times3=\underline{6}$$ ………………(答)(エ)

$$\underline{\underline{4b+\frac{1}{b}}}\geqq2\sqrt{4\cancel{b}\times\frac{1}{\cancel{b}}}=2\times2=\underline{\underline{4}}$$ ……………(答)(オ)

となる。

よって，④は，

$$A+B=\underline{a+\frac{9}{a}}+\underline{\underline{4b+\frac{1}{b}}}\geqq\underline{6}+\underline{\underline{4}}=10$$

すなわち，

$A+B\geqq10$…………………………………………(答)(カキ)

となって，③の不等式と矛盾する。

⇦ これで，背理法が完成したんだね。

以上より，

命題「A,B のうち少なくとも 1 つは 5 以上である。」

……(＊＊) は真である。

どう？背理法と相加・相乗平均の不等式を利用する面白い問題だったでしょう？共通テストでは，これから，論証系の問題も頻出となるはずだから，よく反復練習しておこう。