◆◆ Appendix（付録）◆◆

1. 相対論を考慮に入れたラグランジアン L

粒子の速度 v が，光の速度 c（$\fallingdotseq 2.998\times 10^8$ m/s）に対して無視できない大きさである場合，質量 m の自由粒子のラグランジアンを L とおくと，自由粒子なので，そのポテンシャル V は無視できる。

ここで，一般に，“作用積分”（*action integral*）I は，ラグランジアン L を用いて，次のように表される。

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \quad \cdots\cdots ① \qquad (t,\ t_1,\ t_2：時刻)$$

この変分 δI が，$\delta I = 0$ のとき，最小作用の原理から，オイラー・ラグランジュの方程式：$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ が導ける。（「**解析力学キャンパス・ゼミ**」参照）

一方，4 次元時空において，右のローレンツ変換によっても不変な世界点（*world-point*）の間の距離を s とおくと，s^2 は，

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

で表される。この微小量を ds とおくと，

ローレンツ変換の行列表示

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\left(ローレンツ因子\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$ds = \sqrt{c^2dt^2 \underbrace{-dx^2-dy^2-dz^2}_{-(dx^2+dy^2+dz^2) = -dr^2}}$$

$$= \sqrt{c^2dt^2 - dr^2} = c\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\Bigl(\underbrace{\frac{dr}{dt}}_{自由粒子の速度\ v\ のこと}\Bigr)^2}\, dt \quad となる。$$

$$\therefore\ ds = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt \quad \cdots\cdots ② \quad となる。$$

ここで，相対性理論において，自由粒子に対する作用積分 I は，②の ds に，係数 $-a\,(a>0)$ をかけたものを被積分関数として，次の定積分で表される。

$I = -a\int_{s_1}^{s_2} ds$ ……③

③に，②を代入して，時刻 t による定積分に書き換えると，

$I = -ac\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$ ……④ となる。

(ただし，$s_1 \to s_2$ のとき，$t_1 \to t_2$ とする)

ここで，①と④の被積分関数を比較して，さらに，$v \ll c$ すなわち $\frac{v}{c} \fallingdotseq 0$ の場合，つまり相対論を考慮しなくてよい場合を考えると，

$L = -ac\underbrace{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}_{\left\{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq 1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2} \fallingdotseq -ac\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right)$ ……⑤ となる。

$\alpha \fallingdotseq 0$ のとき，$(1+\alpha)^n \fallingdotseq 1+n\alpha$

$\therefore L = -ac + \frac{av^2}{2c}$ ……⑥ (ただし，$v \ll c$) である。

$v \ll c$ のとき，自由粒子のラグランジアン L は，ポテンシャル $V = 0$ より，

$L = \frac{1}{2}mv^2 + C_1$ ……⑦ (C_1：定数)

定数項 C_1 が，存在しても L は，オイラー・ラグランジュの方程式をみたす。

と表される。ここで，

$a = mc$ ……⑧ とおいて，⑧を⑥に代入すると，

$L = \frac{m\cancel{c}v^2}{2\cancel{c}} - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2 \underbrace{- mc^2}_{\text{定数 } C_1 \text{ のこと}}$ となって，⑦をみたす。

⑤の元の式は，相対論を考慮に入れたラグランジアンであるが，これは当然，$v \ll c$ のときの相対論を考慮に入れなくていい場合の式⑦をみたさないといけない。つまり必要条件から，定数 a の値を⑧のように定めたんだね。納得いった？

これから，⑧を⑤の元の式に代入すると，相対性理論を考慮に入れた，ラグランジアン L が，次のように表されることが分かるんだね。

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \cdots\cdots (*p)$$

(P40 参照)