§2. 数値解析入門

これから，偏微分方程式を“**差分方程式**（さぶん）”で近似して，これとコンピュータ・プログラムを利用して解く手法，すなわち“**数値解析**（すうち）”についても触れておこう。

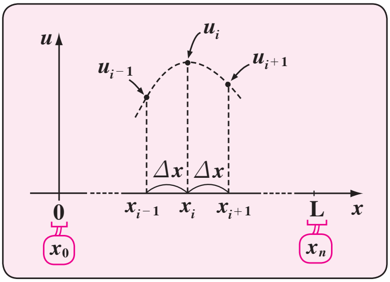
ここではまず，この数値解析の入門として，次の**1**次元熱伝導方程式：

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = a \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ……① （a：温度伝導率） の差分方程式を導こう。

①の温度 u は，時刻 t と位置変数 x の **2** 変数関数なので，$u = u(x, t)$ と表される。ここで，差分方程式とは①の近似方程式のことなので，①の左・右両辺の近似式を導いてみる。

(i)(①の左辺) $= \dfrac{\partial u}{\partial t} \fallingdotseq \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ ← $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}$

$= \dfrac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$ ……② となる。数値解析では，この位置 x の範囲 $0 \leqq x \leqq L$ を n 等分に分割して，$x_i = i \cdot \Delta x$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n,$ $n \cdot \Delta x = L)$ として，各位置 x_i における温度を，右図に示すように u_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ で表す。さらに，時刻 t を旧時刻，$t + \Delta t$ を新時刻とおくことにすると，②は次のようにシンプルに表すことができる。



(①の左辺) $\fallingdotseq \dfrac{\overbrace{u_i}^{\text{新時刻}} - \overbrace{u_i}^{\text{旧時刻}}}{\Delta t}$ ……③

(ii)(①の右辺) $= a \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$

$\fallingdotseq \dfrac{a}{\Delta x} \cdot \left\{ \dfrac{u(x+\Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} - \dfrac{u(x, t) - u(x-\Delta x, t)}{\Delta x} \right\}$ …④ となる。

ここで，時刻はすべて旧時刻 t であり，$x_{i+1} = x + \Delta x$，$x_i = x$，$x_{i-1} = x - \Delta x$ に対応する温度 u を，右上図に示すように，それぞれ u_{i+1}，u_i，u_{i-1} とおくと，④は，

(①の右辺) $\fallingdotseq \dfrac{a}{\Delta x}\left(\dfrac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - \dfrac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right)$ ← u_{i+1}，u_i，u_{i-1} はすべて，旧時刻 t における値

$$= \frac{a}{(\Delta x)^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad \cdots\cdots⑤$$ と表すことができるんだね。

よって，③，⑤を①に代入すると，

$$\frac{u_i - u_i}{\Delta t} = \frac{a}{(\Delta x)^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$ となって，①の差分方程式は，

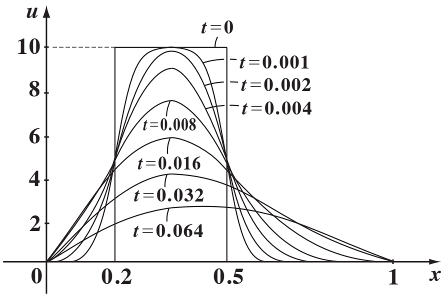
$$\underbrace{u_i}_{\text{新時刻 } t+\Delta t} = \underbrace{u_i + \frac{a \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})}_{\text{すべて，旧時刻 } t} \quad \cdots⑥ \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$$ となる。

⑥式の右辺は，すべて旧時刻の式であり，左辺は新時刻 $t+\Delta t$ の式である。よってまず，時刻 $t=0$ のとき，初期条件として，$u_i\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の値が与えられ，境界条件として，たとえば，$\underbrace{u_0 = 0,\ u_n = 0}_{x=0 \text{ と L のとき，温度 } u=0 \text{(放熱条件)のこと}}$ が与えられると，⑥式を用いて Δt 秒後の $u_i\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$ の値が求まる。この Δt 秒後の u_i の値を用いて⑥式によりさらに $2 \cdot \Delta t$ 秒後の u_i が求められる。以下同様に，$3 \cdot \Delta t$，$4 \cdot \Delta t$，…における温度分布 u_i の経時変化の様子を⑥式により，算出していくことができる。もちろん，これは手計算では計算量が膨大すぎて無理だから，当然，コンピュータ・プログラムを利用して，解くことになる。それでは，$a=1$ のとき，1 次元の熱伝導方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots①' \quad (0 < x < 1)$$ を

境界条件：$u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0$

初期条件：$u(x,\ 0) = \begin{cases} 10 & (0.2 \leqq x \leqq 0.5) \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 \leqq x < 0.2 \\ 0.5 < x \leqq 1 \end{pmatrix} \end{cases}$



の下で，数値解析により①′を解いた結果のグラフを右図に示す。このように数値解析によっても 1 次元熱伝方程式の問題を解くことができるんだね。さらに，この数値解析を本格的に学んでみたい方は「**数値解析キャンパス・ゼミ**」(マセマ) で学習されることを勧める。数値解析によれば，三角形のような不規則な境界条件の場合でも，比較的簡単に計算することができる。数値解析も楽しみながら，マスターしていってほしい。