

この1次元熱伝導方程式の解法により得られる結果は、文字通り温度分布の経時変化の様子を示すものなので、これをグラフで表示することにより、この温度分布が時々刻々に変化していく様子をヴィジュアルにとらえることができ、とても面白いんだね。もちろん、ここでは正確な解析のやり方を示すことはできないが、例題とその解析結果のグラフを示してみようと思う。

それでは、次の例題について解説しよう。

例題 次の偏微分方程式 (1次元熱伝導方程式) を解いてみよう。

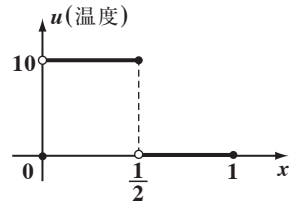
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots\dots\textcircled{1} \quad (0 < x < 1, t > 0) \leftarrow a=1 \text{とした。}$$

$$\text{境界条件: } u(0, t) = u(1, t) = 0 \leftarrow \text{放熱条件}$$

$$\text{初期条件: } u(x, 0) = \begin{cases} 10 & (0 < x \leq \frac{1}{2}) \\ 0 & (\frac{1}{2} < x \leq 1) \end{cases}$$

この例題では、温度伝導率 a を $a=1$ としている。また、初期条件は図(i)に示す通りだね。初期条件とは、時刻 $t=0$ (秒)における温度分布のことで、今回の問題は、1次元問題なので、図(i)に示すように、 x 軸上に $0 \leq x \leq 1$ の範囲に置かれた長さ1の棒の温度分布が、 $t=0$ において、 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ の範囲では温度 u は $10(^{\circ}\text{C})$ であり、 $\frac{1}{2} < x \leq 1$ では $0(^{\circ}\text{C})$ であると言っているんだね。

図(i) 初期条件



そして、境界条件とは、この棒の両端点、すなわち $x=0$ と $x=1$ における条件のことで、今回 $u(0, t) = u(1, t) = 0$ となっているので、これは、 $x=0$ と $x=1$ において、時刻 t とは無関係に常に両端点の温度 u は $0(^{\circ}\text{C})$ に保たれることになる。従って、この両端から熱が流出していくことになるので、 $t=0$ (秒)における上図の初期の温度分布は、時刻の経過と共に、次第に零分布に近づいていくことになるんだね。このような境界条件のこ

とを“^{ほうねつ}放熱条件”という。

“^{ほうねつ}放熱条件”に対する境界条件として、“^{だんねつ}断熱条件”がある。これは、両端点の $x=0$ と 1 における温度勾配 $\frac{\partial u}{\partial x}$ を 0 とする境界条件のことであり、具体的には、

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0 \text{ ということになる。}$$

この場合、両端点 $x=0$ と 1 における温度分布の傾きが 0 なので、この両端点において熱の移動は起こらない。すなわち、これは保温状態になっているため、初期条件による温度の初期分布がどのような形状をしていても、時刻の経過と共に、温度分布は一様分布に近づいていくことになるんだね。

それでは、今回の初期条件と境界条件を基に、①の1次元熱伝導方程式を解いた結果を示すと、温度 $u(x, t)$ は、

$$u(x, t) = \frac{20}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{k\pi}{2}}{k \cdot e^{-k^2\pi^2 t}} \text{sink}\pi x \text{ となる。このように、} u(x, t) \text{ は、}$$

三角関数や指数関数の無限級数として、表されることになるんだね。もちろん、この無限級数を実際に計算することはできないので、これを近似的に、初めの **60項** までの和として、

$$u(x, t) \doteq \frac{20}{\pi} \sum_{k=1}^{60} \frac{1 - \cos \frac{k\pi}{2}}{k \cdot e^{-k^2\pi^2 t}} \text{sink}\pi x$$

で近似計算する。時刻 t を、 $t = 0.001, 0.002, 0.004, \dots, 0.512$ (秒) まで変化させたときの温度分布 $u(x, t)$ の経時変化の様子を右図に示す。

このグラフから $t = 0.512$ (秒) 後には、この温度分布 $u(x, t)$ がほぼ^{ゼロ}零分布になってしまうことが分かるんだね。

このように、温度分布の変化の様子を示す、美しいグラフを描けることも、偏微分方程式を解く上での楽しみと言える。これで、皆さんも偏微分方程式について興味をもって頂けたと思う。

