演習問題 104　● マルコフ過程 (II) ●

確率分布 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ が次式をみたすものとする。

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} \cdots\cdots ①\quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

(ただし，$a_n + b_n + c_n = 1$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ とする。)

このとき，極限 $\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ が存在するものとして，$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ を求めよ。

ヒント！ 極限 $\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ であるとき，極限 $\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ となる。
よって，$n \to \infty$ のとき①に，これらを代入すれば，α，β，γ の連立方程式が得られる。ただし，これは実質的に 2 つの方程式なので，これと，$\alpha + \beta + \gamma = 1$ (全確率) の条件式を併せて，α，β，γ の値を求めることができるんだね。

解答＆解説

$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ であるとき，$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ となる。

よって，$n \to \infty$ のとき，①は，

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}_{E\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}}_{M(\text{推移確率行列})} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \cdots ②$$

となる。よって，$M = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$ とおくと，

②を変形して，

$$(E - M)\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots ③$$

となる。

$$E - M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.3 & -0.3 \\ -0.2 & 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

よって，③は，

$$\begin{bmatrix} 0.3 & -0.3 & -0.3 \\ -0.2 & 0.5 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots ③'$$

となる。③′を変形して，

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ となるので，

$E-M$ に行基本変形を行うと，

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$ 2倍してたす　たす

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ たす

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Big\} rank(E-M) = 2$$

$\alpha - \beta - \gamma = 0$ ……④

$\beta - \gamma = 0$ ……⑤ となる。さらに，

$\alpha + \beta + \gamma = 1$ ……⑥ の条件式を連立させて，α，β，γ の値を求めると，

$\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\beta = \dfrac{1}{4}$，$\gamma = \dfrac{1}{4}$ となる。

④＋⑥より，$2\alpha = 1$ $\therefore \alpha = \dfrac{1}{2}$

よって，④は，$\beta + \gamma = \dfrac{1}{2}$ ……④′

また，$\beta - \gamma = 0$ ………⑤

④′＋⑤より，$2\beta = \dfrac{1}{2}$ $\therefore \beta = \dfrac{1}{4}$

⑤より，$\gamma = \beta = \dfrac{1}{4}$

$$\therefore \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ である。…………(答)

参考

$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$ より，$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = M^n\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = M^n\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ となる。

よって，$n = 1$，2，10 のときの確率分布を実際に計算すると，

・$n = 1$ のとき，$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.31 \\ 0.35 \end{bmatrix}$，　・$n = 2$ のとき，$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.436 \\ 0.258 \\ 0.306 \end{bmatrix}$，

・$n = 10$ のとき，$\begin{bmatrix} a_{10} \\ b_{10} \\ c_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4999\cdots \\ 0.2499\cdots \\ 0.2501\cdots \end{bmatrix}$ となって，n を大きくするに従って，

$\lim\limits_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$ に近づいていくことが分かるんだね。