§3. 数値解析入門

これまで，様々な偏微分方程式をフーリエ解析により，解析的に解を求める手法について詳しく解説してきた。しかし，実はそれ以外にも“**差分方程式**（さぶん）”を作って，コンピュータ·プログラムにより，偏微分方程式を“**数値解析**（すうち）”により近似的に解く手法もあるんだね。

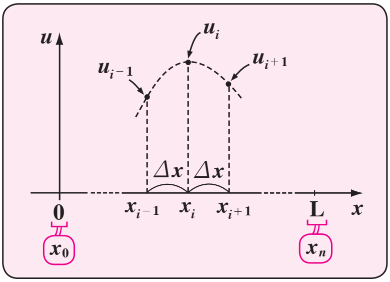
ここでは，この数値解析の入門として，次の1次元熱伝導方程式：

$\frac{\partial u}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ……① (a：温度伝導率) の差分方程式を導いてみよう。

①の温度 u は，時刻 t と位置変数 x の2変数関数なので，$u = u(x, t)$ と表される。ここで，差分方程式とは①の近似方程式のことなので，①の左・右両辺の近似式を導いてみる。

(i)(①の左辺) $= \frac{\partial u}{\partial t} \fallingdotseq \frac{\Delta u}{\Delta t}$ $\quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}$

$= \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$ ……② となる。数値解析では，この位置 x の範囲 $0 \leqq x \leqq L$ を n 等分に分割して，$x_i = i \cdot \Delta x$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n,$ $n \cdot \Delta x = L)$ として，各位置 x_i における温度を，右図に示すように u_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ で表す。さらに，時刻 t を旧時刻，$t + \Delta t$ を新時刻とおくことにすると，②は次のようにシンプルに表すことができるんだね。



$$(\text{①の左辺}) \fallingdotseq \frac{\overbrace{u_i}^{\text{新時刻}} - \overbrace{u_i}^{\text{旧時刻}}}{\Delta t} \quad \cdots\cdots③$$

(ii)(①の右辺) $= a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$

$$\fallingdotseq \frac{a}{\Delta x} \cdot \left\{ \frac{u(x+\Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} - \frac{u(x, t) - u(x-\Delta x, t)}{\Delta x} \right\} \quad \cdots④$$ となる。

ここで，時刻はすべて旧時刻 t であり，$x_{i+1} = x + \Delta x$，$x_i = x$，$x_{i-1} = x - \Delta x$ に対応する温度 u を，右上図に示すように，それぞれ u_{i+1}，u_i，u_{i-1} とおくと，④も次のようにシンプルな近似式：

$$(\text{①の右辺}) \fallingdotseq \frac{a}{\Delta x}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}-\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}\right)$$

u_{i+1}, u_i, u_{i-1} はすべて旧時刻 t における値

$$=\frac{a}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}) \quad \cdots\cdots⑤$$ で表すことができる。

よって，③，⑤を①に代入してまとめると，

$$\frac{u_i-u_i}{\Delta t}=\frac{a}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})$$ となって，①の差分方程式は，

$$\underbrace{u_i}_{\text{新時刻 } t+\Delta t}=\underbrace{u_i+\frac{a\cdot\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})}_{\text{すべて，旧時刻 } t} \quad \cdots⑥ \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$$ となる。

⑥式の右辺は，すべて旧時刻の式であり，左辺は新時刻 $t+\Delta t$ の式である。これから，時刻 $t=0$ のとき，初期条件として，$u_i\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の値が与えられ，境界条件として，たとえば，$\underbrace{u_0=0,\ u_n=0}_{x=0 \text{ と L のとき，温度 } u=0 \text{（放熱条件）のこと}}$ が与えられると，⑥式を用いて Δt 秒後の $u_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$ の値が求まる。この Δt 秒後の u_i の値を用いて⑥式によりさらに $2\cdot\Delta t$ 秒後の u_i が求められる。以下同様に，$3\cdot\Delta t$，$4\cdot\Delta t$，…における温度分布 u_i の経時変化の様子を⑥式により，算出していくことができるんだね。もちろん，これは手計算では計算量が膨大すぎて無理だから，コンピュータ・プログラムを実行して，数値解析により求めていくことになる。それでは，$a=1$ のとき，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots①' \quad (0<x<1)$$ を

境界条件：$u(0,\ t)=u(1,\ t)=0$

初期条件：$u(x,\ 0)=\begin{cases}10 & (0<x\leqq 0.5)\\ 0 & (0.5<x\leqq 1)\end{cases}$

の下で解いた結果を右図に示す。P172 とほぼ同じグラフが描けていることが分かるはずだ。本格的に数値解析を学びたい方は「**数値解析キャンパス・ゼミ**」(マセマ)で学習されることを勧める。