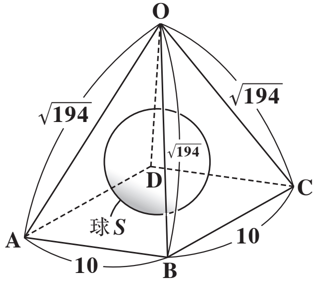
絶対暗記問題 70	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

右図に示すように，正四角すい **O-ABCD** とそれに内接する球 **S** がある。$OA = OB = OC = OD = \sqrt{194}$，$AB = BC = CD = DA = 10$ である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 内接球 **S** の半径 r を求めよ。

(2) 底面の正方形 **ABCD** と平行で，この底面より高さ **5** の位置にある平面 π で，この内接球 **S** を切ってできる円 C' の半径 r' を求めよ。

ヒント！ (1) 辺 **AD** と **BC** の中点をそれぞれ **M**，**N** とおき，断面の三角形 **OMN** で考えて，内接球 **S** の半径 r を求めよう。(2) も，この断面の三角形で考えるといいんだね。

解答＆解説

(1) 図 1 に示すように，底面の正方形 **ABCD** の辺 **AD** と **BC** の中点をそれぞれ **M**，**N** とおくと，

$OM = ON = \sqrt{OA^2 - AM^2}$

$= \sqrt{194 - 25} = \sqrt{169}$

$= 13$ となる。

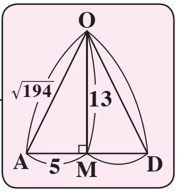
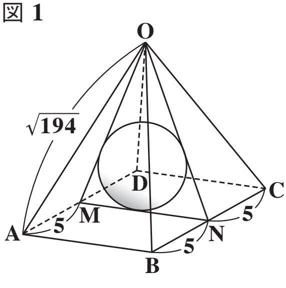


図 1

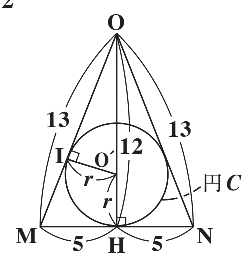


よって，この正四角すいと内接球 **S** の平面 **OMN** による断面 $\triangle OMN$ について考える。図 2 に示すように，辺 **MN** の中点を **H**，球 **S** の断面の円 C の中心を O'，半径を r とおく。

これは，球 **S** の中心と半径でもある。

$\triangle OMN$ は $OM = ON = 13$ の二等辺三角形より，$\triangle OMH$ は $\angle OHM = 90°$ の直角三角形となる。

図 2

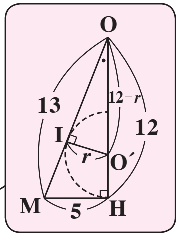


よって，三平方の定理より，

$OH=\sqrt{OM^2-MH^2}=\underbrace{\sqrt{13^2-5^2}}_{\sqrt{169-25}}=\sqrt{144}=12$ となる。

ここで，中心 O′ から辺 OM に下した垂線の足を I とおくと，2 つの直角三角形△OHM と△OIO′ は 2 角が等しいので，相似な三角形である。よって，

∠MOH は共通で，∠OHM＝∠OIO′＝90°で，2 角が等しい。



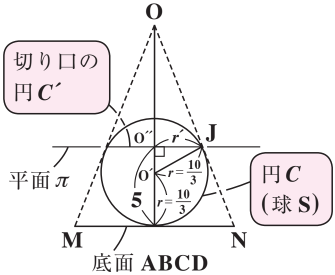
$13:5=(12-r):r$ ← OM：MH＝OO′：O′I

$5(12-r)=13r$，$60-5r=13r$ より，$18r=60$

よって，求める内接球 S の半径 r は，$r=\dfrac{60}{18}=\dfrac{10}{3}$ である。………(答)

(2) この球 S を，底面 ABCD と平行で高さ 5 の位置にある平面 π で切ってできる断面の円 C' の半径 r' を求める。(円 C' の中心を O″ とおく。) これも，断面の△OMN で考える。図 3 に示すように点 J をとると，直角三角形 JO″O′ は，

図 3

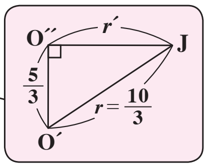


$O''J=r'$，$O'O''=5-r=5-\dfrac{10}{3}=\dfrac{5}{3}$，

$JO'=r=\dfrac{10}{3}$ より，三平方の定理を用いると，

$r'=\sqrt{\left(\dfrac{10}{3}\right)^2-\left(\dfrac{5}{3}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{100-25}{9}}=\dfrac{\sqrt{75}}{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$



よって，求める平面 π による球 S の断面の円 C' の半径 r' は，

$r'=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ である。………………(答)