★★★元気に伸びる数学Ⅰ・A問題集★★★
補充問題（additional questions）

補充問題 1	難易度 ★★	範囲を押さえる型の整数問題

自然数 a，b，c，d が次の条件をみたす。

$a+b+2c+2d=2abcd$ ……①

$(0<a\leqq b\leqq c\leqq d)$

この条件をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ をすべて求めよ。

ヒント！ $0<a\leqq b\leqq c\leqq d$ より，①の左辺の a，b，c に d を代入すると，①は，$2abcd=a+b+2c+2d\leqq d+d+2d+2d=6d$ より，$abc\leqq 3$ と範囲を押さえることができる。これから，$(a,\ b,\ c)$ の値の組を特定して，d の値を求めていけばいいんだね。頑張ろう！

解答＆解説

$a+b+2c+2d=2abcd$ ……①

$(a,\ b,\ c,\ d$：自然数$)$

ここで，$0<a\leqq b\leqq c\leqq d$ の条件より，①は，

$$2abcd=a+b+2c+2d$$
$$\leqq d+d+2d+2d=6d$$

よって，$2abcd\leqq 6d$ より，この両辺を $2d(>0)$ で割ると，

$abc\leqq 3$ ……② となる。

ここで，$a,\ b,\ c$ は自然数より，②をみたす自然数

正の整数

の組 $(a,\ b,\ c)$ は，$0<a\leqq b\leqq c$ より，

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3)$ の3通りのみである。

ココがポイント

⇐ $a\leqq b\leqq c\leqq d$ より，a，b，c に d を代入すると，不等式ができて，これにより，abc の値の範囲を押さえることができる。

⇐ $abc\leqq 3$ ……②より，$abc=1$ または 2 または 3 となる。これから，自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ が3通りのみであることが分かる。

(ⅰ) $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ のとき，

これらの値を①に代入すると，

$$1 + 1 + 2 \cdot 1 + 2d = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot d$$

$$4 + 2d = 2d$$

$\therefore\ 4 = 0$ となって，不適である。

⇦ $abc = 1$ のとき

(ⅱ) $(a, b, c) = (1, 1, 2)$ のとき，

これらの値を①に代入して，

$$1 + 1 + 2 \cdot 2 + 2d = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot d$$

$$6 + 2d = 4d \qquad 2d = 6$$

$\therefore\ d = 3$ となる。

これは，$0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ の条件もみたす。

よって，

$(a, b, c, d) = (1, 1, 2, 3)$ となる。

⇦ $abc = 2$ のとき

⇦ $d = 3$ より，
$(a, b, c, d) = (1, 1, 2, 3)$
となって，すべての条件をみたす。実際に，これらの値を①に代入すると，
$\underbrace{1+1+2\cdot2+2\cdot3}_{12} = \underbrace{2\cdot1\cdot1\cdot2\cdot3}_{12}$
となって，成り立つことが分かる。

(ⅲ) $(a, b, c) = (1, 1, 3)$ のとき，

これらの値を①に代入して，

$$1 + 1 + 2 \cdot 3 + 2d = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot d$$

$$8 + 2d = 6d \qquad 4d = 8$$

$\therefore\ d = 2$ となって，

$0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ の条件をみたさない。

よって，不適である。

⇦ $abc = 3$ のとき

⇦ $(a, b, c, d) = (1, 1, 3, 2)$
となって，$a \leqq b \leqq c \leqq d$
の条件をみたさない。

以上 (ⅰ)(ⅱ)(ⅲ) より，①の方程式と，

$0 < a \leqq b \leqq c \leqq d$ の条件をみたす自然数の値の組

(a, b, c, d) は，

$(a, b, c, d) = (1, 1, 2, 3)$ の 1 組のみである。

……(答)