例題 24　次の偏微分方程式 (1 次元波動方程式) を解いてみよう。

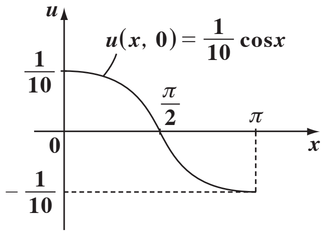
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots ① \quad (0 < x < \pi,\ 0 < t) \longleftarrow \boxed{a^2 = 1 \text{ の場合}}$$

初期条件：$u(x,\ 0) = \frac{1}{10}\cos x,\ \ u_t(x,\ 0) = 0$

境界条件：$u_x(0,\ t) = u_x(\pi,\ t) = 0$ ← 自由端

この問題の初期条件：$u(x,\ 0) = \frac{1}{10}\cos x$ のグラフを図 (i) に示す。今回は，$x = 0$ と π の両端点における弦の接線の傾きが，境界条件により，0 となる，いわゆる自由端の弦の振動問題なんだね。変数分離法により，$u(x,\ t) = X(x)\cdot T(t)$ ……② とおいて，②を①に代入すると，

図 (i)



$X\cdot\ddot{T} = X''\cdot T$ より，$\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X''}{X}$　となる。

この両辺は，それぞれ t のみ，x のみの式なので，これが恒等的に成り立つためには，これは定数 α と等しくなければならない。しかも，$\alpha \geqq 0$ のときは不適となるので，$\alpha = -\omega^2 (<0)$ とおくと，← P187 と同様

$\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -\omega^2$ より，2 つの常微分方程式：

(Ⅰ) $X'' = -\omega^2 X$ ……③ と (Ⅱ) $\ddot{T} = -\omega^2 T$ ……④　が導かれる。

(Ⅰ) $X'' = -\omega^2 X$ ……③ の解は，$X(x) = A_1\cos\omega x + \cancel{A_2\sin\omega x}$ …⑤　となる。

⑤を x で微分して，

$X_x(x) = -A_1\omega\sin\omega x + \cancel{A_2\omega\cos\omega x}$　となる。

ここで，境界条件：$X_x(0) = X_x(\pi) = 0$ より，← 両端点は振動するが，端点での弦の接線の傾きは常に 0 になる。(自由端の条件)

$$\begin{cases} X_x(0) = A_2\omega = 0 & \text{かつ，} \\ X_x(\pi) = -A_1\omega\sin\underbrace{\pi\omega}_{k\pi\ (k=1,2,3,\cdots)} = 0 \end{cases}$$

$\therefore A_2 = 0,\ \omega = k\ \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　となる。

これらを⑤に代入して，$X(x) = A_1\cos kx$ …⑥　$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる。

$(\mathrm{II})\ \omega = k \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より，

$\boxed{X(x) = A_1\cos kx \ \cdots\cdots ⑥}$

$\ddot{T} = -k^2T$ ……④の解は，$T(t) = B_1\cos kt + \cancel{B_2\sin kt}$ …⑦　が導かれる。

⑦を t で微分して，

$T_t(t) = -B_1k\sin kt + \cancel{B_2k\cos kt}$　となる。

ここで，初期条件：$T_t(0) = 0$　より，

$T_t(0) = B_2k = 0 \qquad \therefore B_2 = 0$　となる。これを⑦に代入して，

$T(t) = B_1\cos kt$ ……⑧　$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　となる。

⑥，⑧より，定数係数を除いたこれらの積を $u_k(x,\ t)$ とおくと，②から，

$u_k(x,\ t) = \cos kx \cdot \cos kt \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　となる。

これに重ね合わせの原理を用いると，

$u(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx \cdot \cos kt$ ……⑨　が導ける。

ここで初期条件から，$u(x,\ 0)$ は，

$u(x,\ 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx = \dfrac{1}{10}\cos x$ ……⑩　である。

⑩から，$k = 1$ のときのみ，$a_1 = \dfrac{1}{10}$　であり，

$k = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ のとき，$a_k = 0$ であることが分かる。

今回，a_k は，積分計算を行うことなく，⑩の中辺と右辺の比較から求められる！

この結果を⑨に代入して，自由端の弦の振動の解は，

$u(x,\ t) = \dfrac{1}{10}\cos x \cdot \cos t$ ……⑪　$(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq t)$　となる。⑪より，

$t = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi$ (秒) における弦の振動の様子を図 6 に示す。

このように自由端の場合，両端点は変動 (振動) するが，両端点における弦の接線の傾きは常に 0 になっていることが，ご理解頂けたと思う。

図 6　例題 24 の $u(x,\ t)$ のグラフ