では次に，$\sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k+1})$ の形の数列の和と **"はさみ打ちの原理"** を組み合せた融合問題にもチャレンジしてみよう。

練習問題 50　無限級数とはさみ打ちの原理　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

次の数列の和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\frac{k\pi}{6} - \sin\frac{(k+1)\pi}{6}\right\}$ を求め，

極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を求めよ。

S_n は，$S_n = \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k+1})$ の形をしているので，部分分数分解型の Σ 計算により，途中の項が消去されて，$S_n = I_1 - I_{n+1}$ となる。ここで，極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を求めるためには，はさみ打ちの原理を利用すればいいんだね。頑張ろう！

与えられた数列の部分和 S_n を求めると，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\Big\{\underbrace{\sin\frac{k\pi}{6}}_{I_k} - \underbrace{\sin\frac{(k+1)\pi}{6}}_{I_{k+1}}\Big\}$$

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k+1})\\ &= (I_1 - \cancel{I_2}) + (\cancel{I_2} - \cancel{I_3})\\ &\quad + (\cancel{I_3} - \cancel{I_4}) + \cdots + (\cancel{I_n} - I_{n+1})\\ &= I_1 - I_{n+1} \text{ となる。}\end{aligned}$$

$$= \Big(\underbrace{\sin\frac{1\cdot\pi}{6}}_{I_1} - \underbrace{\cancel{\sin\frac{2\pi}{6}}}_{I_2}\Big) + \Big(\underbrace{\cancel{\sin\frac{2\pi}{6}}}_{I_2} - \underbrace{\cancel{\sin\frac{3\pi}{6}}}_{I_3}\Big)$$

$$+ \Big(\underbrace{\cancel{\sin\frac{3}{6}\pi}}_{I_3} - \underbrace{\cancel{\sin\frac{4\pi}{6}}}_{I_4}\Big) + \cdots + \Big(\underbrace{\cancel{\sin\frac{n\pi}{6}}}_{I_n} - \underbrace{\sin\frac{(n+1)\pi}{6}}_{I_{n+1}}\Big)$$

$$= \underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{\frac{1}{2}} - \sin\frac{(n+1)\pi}{6}$$

$$\therefore\ S_n = \frac{1}{2} - \sin\frac{(n+1)\pi}{6} \quad \cdots\cdots① \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \text{ となる。}$$

ここで，$n=1, 2, 3, \cdots$と変化すると，$\sin\dfrac{(n+1)\pi}{6}$ の値も変化する。しかし，この変化の範囲は $-1 \leqq \sin\dfrac{(n+1)\pi}{6} \leqq 1$ に過ぎないので，①を n で割って $n\to\infty$とした場合，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0$ となることは，明らかだね。ただし，これを数学的にキチンと示すためには，"**はさみ打ちの原理**"を用いる必要があるんだね。

ここで，①の右辺の第 2 項 $\sin\dfrac{(n+1)\pi}{6}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ の取り得る値の範囲は，$-1 \leqq \sin\dfrac{(n+1)\pi}{6} \leqq 1$ より，この各辺に -1 をかけて，

$1 \geqq -\sin\dfrac{(n+1)\pi}{6} \geqq -1$
(負の数をかけたので，不等号の向きが逆転する。)

$$-1 \leqq -\sin\frac{(n+1)\pi}{6} \leqq 1$$

この各辺に $\dfrac{1}{2}$ をたして，

$$\frac{1}{2}-1 \leqq \underbrace{\frac{1}{2}-\sin\frac{(n+1)\pi}{6}}_{S_n} \leqq \frac{1}{2}+1 \text{ より，} -\frac{1}{2} \leqq S_n \leqq \frac{3}{2} \quad \cdots\cdots② \text{ となる。}$$

②の各辺を $n(>0)$ で割って，

$$-\frac{1}{2n} \leqq \frac{S_n}{n} \leqq \frac{3}{2n} \quad \cdots\cdots③$$

これで，$\dfrac{S_n}{n}$ についての"**はさみ打ち**"の形が完成した！後は，$n\to\infty$の極限をとるだけだね。

③の各辺の $n\to\infty$の極限をとると，

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{-\frac{1}{2n}}_{0}\Big) \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} \leqq \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{3}{2n}}_{0} \quad \text{となり，}$$

左，右の辺の極限が共に 0 に収束するので，はさみ打ちの原理より，
極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ も 0 に収束する。

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0 \quad \text{となって，答えだ。}$$

どう？無限級数とはさみ打ちの融合問題だったんだけれど，もうそんなに難しくは感じないでしょう？実力が付いてきた証拠だね！