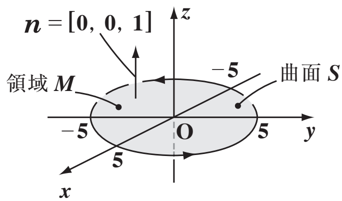
演習問題 14 ● ストークスの定理(Ⅰ)●

ベクトル場 $\boldsymbol{f}=[x-y,\ x^2+y^2,\ 0]$ に，閉曲線 C：$x^2+y^2=25(z=0)$ と C で囲まれる xy 平面上の円 S がある。このとき，ストークスの定理：
$\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\oint_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{p}$ ……(＊) が成り立つことを確認せよ。
(ただし，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の z 成分は 0 以上とする。)

ヒント！ 曲面 S が xy 平面上の円とその内部：$x^2+y^2\leqq 25$ $(z=0)$ より，この単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n}=[0,\ 0,\ 1]$ となるんだね。(＊)の左辺と右辺をそれぞれ計算して，これらが一致することを確認してみよう。

解答＆解説

曲面 S は，xy 平面上の原点 O を中心とする半径 5 の円とその内部である。



S：$x^2+y^2\leqq 25$ ……① $(z=0)$

よって，この法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，

$\boldsymbol{n}=[0,\ 0,\ 1]$ $\cos\gamma$ である。

次に，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の回転を求めると，

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}=[0,\ 0,\ 2x+1]$ である。

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ x-y & x^2+y^2 & 0 & x-y \end{array}$$

$2x-(-1)]\quad[0-0,\quad 0-0,$

(i) よって，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}=[0,\ 0,\ 2x+1]\cdot[0,\ 0,\ 1]$

$=2x+1$ より，(＊)の左辺は，

$$((＊)\text{の左辺})=\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iint_S(2x+1)\underbrace{dS}_{\frac{1}{|\cos\gamma|}dxdy=\frac{1}{1}dxdx\ (\because\cos\gamma=1)}=\iint_M(2x+1)dxdy \quad\cdots②$$

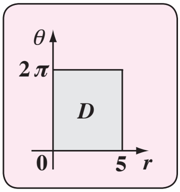
今回，領域 M は，曲面 S(xy 平面上の半径 5 の円板)と一致するので，

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ $(0\leqq r\leqq 5,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ とおいて座標を $(x,\ y)$ から極座標 $(r,\ \theta)$ に変換すると，

$dxdy=|J|drd\theta=rdrd\theta$ となる。(J：ヤコビアン)

よって，②をさらに変形して，

$$((*)\text{の左辺}) = \iint_M (2\underbrace{x}_{r\cos\theta}+1)\underbrace{dxdy}_{rdrd\theta}$$



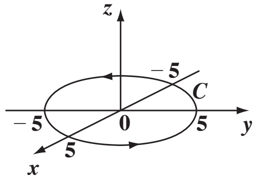
$$= \iint_D 2r^2\cos\theta\, drd\theta + \iint_D rdrd\theta$$

$$= \cancel{2\int_0^5 r^2dr \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta}_{[\sin\theta]_0^{2\pi}=0}} + \int_0^5 rdr \cdot \int_0^{2\pi} 1\cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[r^2\right]_0^5 \times \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{25}{2}\times 2\pi = 25\pi \quad \cdots\cdots③ \quad \text{となる。}$$

(ii) 次に，閉曲線 C に沿う，1 周線積分，

すなわち，((∗)の右辺)を求めると，



$$((*)\text{の右辺}) = \oint_C \underbrace{\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{p}}_{\substack{[x-y,\ x^2+y^2,\ 0]\cdot[dx,\ dy,\ 0] \\ =(x-y)dx+(x^2+y^2)dy}}$$

$$= \oint_C \{(x-y)dx + (x^2+y^2)dy\} \quad \cdots\cdots④ \quad \text{となる。}$$

点 (x, y) は円 C 上を 1 周する。

ここで，$x = 5\cos t$，$y = 5\sin t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とおくと，

$$((*)\text{の右辺}) = \int_0^{2\pi}\left\{5(\cos t - \sin t)\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{-5\sin t}dt + \underbrace{25}_{25(\cos^2 t+\sin^2 t)}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{5\cos t}dt\right\}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{25(\underbrace{\sin^2 t}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2t)} - \sin t\cos t) + 125\cos t\right\}dt$$

$$= \left[25\left\{\frac{1}{2}\left(t - \cancel{\frac{1}{2}\sin 2t}\right) - \cancel{\frac{1}{2}\sin^2 t}\right\} + \cancel{125\sin t}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 25\times\frac{1}{2}\times 2\pi = 25\pi \quad \cdots\cdots④ \quad \text{となって，③と一致する。}$$

以上(i)(ii)より，ストークスの定理が成り立つことが確認できた。…(終)