$$\therefore\ S=\int_{\pi}^{0}\underbrace{\sin\theta}_{y}\cdot\underbrace{(-2\sin\theta)}_{x'}\,d\theta=2\int_{0}^{\pi}\underbrace{\sin^{2}\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}\ (\text{半角の公式})}\,d\theta$$

⊖をとって，
$\pi \to 0$ を
$0 \to \pi$ にした

$$=\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\pi-\frac{1}{2}\cancel{\underbrace{\sin 2\pi}_{0}}-\left(0-\frac{1}{2}\cancel{\underbrace{\sin 0}_{0}}\right)=\pi$$ となって，答えだ。

それではもう **1** 題，媒介変数された曲線として，サイクロイド曲線と x 軸とで囲まれた図形の面積を次の例題で求めることにしよう。

(ex2) サイクロイド曲線 $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ a$：正の定数$)$

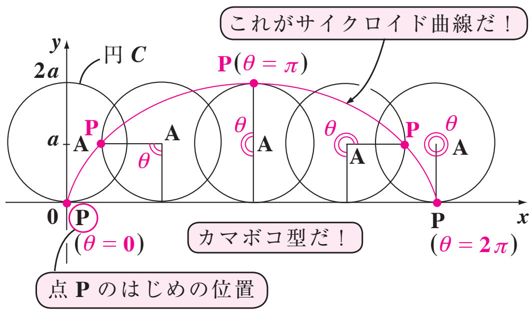
と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよう。

ここで，サイクロイド曲線について復習しておこう。

図 **3** に示すように，はじめは x 軸と原点で接する半径 a の円 C があるものとする。そして，この円上の点で，初めに原点と同じ位置にあるものを **P** とおこう。

図 **3** に示すように，この円 C をキュッとスリップさせることなく，x 軸と接するようにゆっくりゴロゴロと回転させたとき，初め原点の位置にあった円周上の点 **P** が描くカマボコ型の曲線がサイクロイド曲線になるんだね。

図 **3** サイクロイド曲線の概形

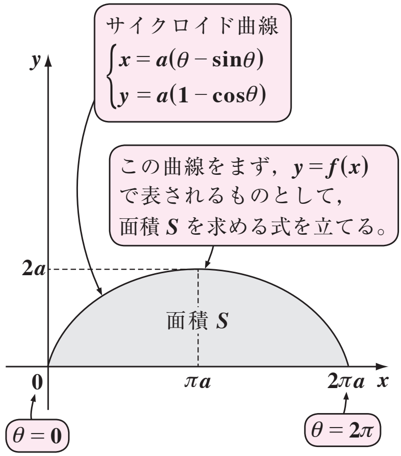


従って，θ が $0 \to 2\pi$ まで変化して 1 回転した結果，点 $\mathbf{P}$ が x 軸と再び接するときの点の x 座標は，半径 a の円周の長さ $2\pi a$ になるんだね。つまり，

$$\begin{cases} x : 0 \to 2\pi a & \text{のとき，} \\ \theta : 0 \to 2\pi & \text{となる} \end{cases}$$

ような対応関係があることに気を付けよう。それでは，図 4 に示すように，このサイクロイド曲線と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めるためにまず，このサイクロイド曲線が，$y = f(x)\ \ (0 \leqq x \leqq 2\pi a)$ の形で表されるものとして，面積 S を求める式を立てると，

図 4　サイクロイド曲線と x 軸とで囲まれる図形の面積 S



$S = \displaystyle\int_0^{2\pi a} y\,dx$ ……①　となるんだね。

ここで，$dx = \dfrac{dx}{d\theta} \cdot d\theta$ として，媒介変数 θ での積分に置き換えると，

$$\begin{cases} x : 0 \to 2\pi a & \text{のとき，} \\ \theta : 0 \to 2\pi & \text{と変化するので，①の定積分は，} \end{cases}$$

$S = \displaystyle\int_0^{2\pi} y \cdot \frac{dx}{d\theta}\,d\theta$ ……②　となるんだね。

ここで，サイクロイド曲線 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) & (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \end{cases}$ より，

$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}\{a(\theta - \sin\theta)\} = a(1 - \cos\theta)$ となるので，これと $y = a(1 - \cos\theta)$ を代入して②式の定積分を計算すると，

$$S=\int_0^{2\pi} y\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$\boxed{1-2\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)}$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}\theta-\cancel{2\sin\theta}+\cancel{\frac{1}{4}\sin 2\theta}\right]_0^{2\pi}=a^2\times\frac{3}{2}\times 2\pi=3\pi a^2$$ となって，

$$\boxed{\because\ \sin 0=\sin 2\pi=\sin 4\pi=0}$$

答えが導けるんだね。どう？大丈夫だった？

● さらに，区分求積法まで押さえておこう！

面積計算の応用として，これから“**区分求積法**(くぶんきゅうせきほう)”について解説しよう。まず，この区分求積法の公式を下に書いておくよ。

区分求積法の公式

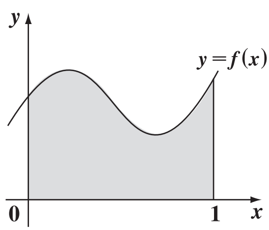
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

“ヒエ～！”って感じ？ 確かに初めて“**区分求積法**”の公式を見た人が感じる率直な気持ちだろうね。$\lim_{n\to\infty}$ や $\sum_{k=1}^{n}$ や $\int_0^1$ と，これまでに習った記号が総出演してる公式だからね。エッ，あきらめたって？ オイオイ，早すぎるよ！これから，すべて分かるように解説していくから，心配しないでくれ(汗)

まず，公式の右辺 $\int_0^1 f(x)\,dx$ の意味はいいね。$f(x)\geqq 0$ のとき，図5(ⅰ)に示すように，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，$y=f(x)$ と $y=0$ [x 軸] とで挟まれる図形の面積を表しているんだね。

図5　区分求積法

(ⅰ)



これに対して，公式の左辺を考