

二項分布と正規分布

絶対暗記問題 60

難易度 ★★

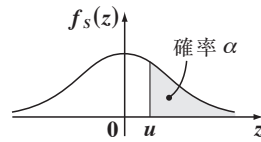
CHECK1

CHECK2

CHECK3

確率変数 X が、二項分布 $B(n, p)$ に従うとき、その平均 m と分散 σ^2 は、 $m = np$ 、 $\sigma^2 = npq$ ($q = 1 - p$) である。ここで、 n が十分大きな数であるとき、この二項分布に従う確率変数 X は、近似的に連続型の正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うことが分かっている。ここで、確率変数 X が二項分布 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$ に従うとき、右の標準正規分布の確率分布表を利用して、次の各確率の近似値を求めよ。

標準正規分布表 $\alpha = \int_u^{\infty} f_s(z) dz$



u	α
0.4	0.3446
0.5	0.3085
0.6	0.2743
0.7	0.2420

- (i) $P(X \geq 125)$ (ii) $P(X \leq 126)$ (iii) $P(116 \leq X \leq 127)$

ヒント!

$n = 720$ は、十分に大きな数と考えられるので、 $B(n, p) = B\left(720, \frac{1}{6}\right)$ の平均 $m = np = 720 \times \frac{1}{6} = 120$ 、分散 $\sigma^2 = np(1-p) = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 100$ となって、この $B(n, p)$ に従う確率変数 X は、近似的に正規分布 $N(m, \sigma^2) = N(120, 100)$ に従うものと考えていいんだね。

解答&解説

確率変数 X は、二項分布 $B\left(\underbrace{720}_n, \underbrace{\frac{1}{6}}_p\right)$ に従う。この平均 m と分散 σ^2 は、

$$m = n \cdot p = 720 \times \frac{1}{6} = 120$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 120 \times \frac{5}{6} = 100 \quad (q = 1 - p)$$

である。ここで、 $n = 720$ は、十分に大きな数と考えられるので、この確率変数 X は、近似的に連続型の正規分布 $N(\underbrace{120}_m, \underbrace{100}_{\sigma^2})$ に従うものとする。

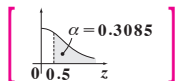
この X を標準化変数 Z に変換すると、

$$Z = \frac{X-120}{10} \leftarrow Z = \frac{X-m}{\sigma} \quad \text{となる。これから、各確率を求めると、}$$

(i) $X \geq 125$ となる確率 $P(X \geq 125)$ は、

$$Z = \frac{X-120}{10} \geq \frac{125-120}{10} = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ より、標準正規分布表を用いると、}$$

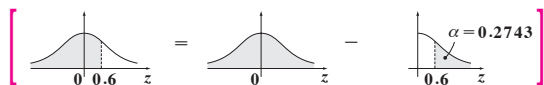
$$P(X \geq 125) = P(Z \geq 0.5) = 0.3085 \text{ である。} \dots\dots\dots (\text{答})$$



(ii) $X \leq 126$ となる確率 $P(X \leq 126)$ は、

$$Z = \frac{X-120}{10} \leq \frac{126-120}{10} = 0.6 \text{ より、標準正規分布表を用いると、}$$

$$P(X \leq 126) = P(Z \leq 0.6) = 1 - P(Z \geq 0.6)$$



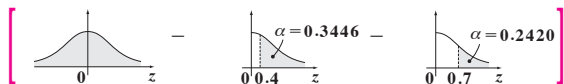
$$= 1 - 0.2743 = 0.7257 \text{ である。} \dots\dots\dots (\text{答})$$

(iii) $116 \leq X \leq 127$ となる確率 $P(116 \leq X \leq 127)$ は、

$$\frac{116-120}{10} \leq \frac{X-120}{10} \leq \frac{127-120}{10} \text{ より、} -0.4 \leq Z \leq 0.7 \text{ よって、}$$

$$\text{標準正規分布表を用いると、} \quad P(116 \leq X \leq 127) = P(-0.4 \leq Z \leq 0.7)$$

$$= 1 - P(Z \geq 0.4) - P(Z \geq 0.7)$$



$$= 1 - 0.3446 - 0.2420 = 0.4134 \text{ である。} \dots\dots\dots (\text{答})$$