それではもう **1** 題，場合分けと大小関係に注意して次の例題で面積を求めてみよう。

◆例題20◆

$0 \leqq x \leqq 3$ の範囲で，**2** つの関数 $y = f(x) = -x^2 + 5$ と $y = g(x) = |x-1|$ のグラフで挟まれる図形の面積 S を求めよ。

解答&解説

$y = f(x) = -x^2 + 5$ ……①　　$y = g(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geqq 1) \\ -x+1 & (<1) \end{cases}$ ……②

とおいて，まず，$x \geqq 1$ における①と②の交点の x 座標を求めると，

$x \geqq 1$ のとき，①，②より y を消去して，

$-x^2 + 5 = x - 1$　　$x^2 + x - 6 = 0$　　$(x+3)(x-2) = 0$ より，

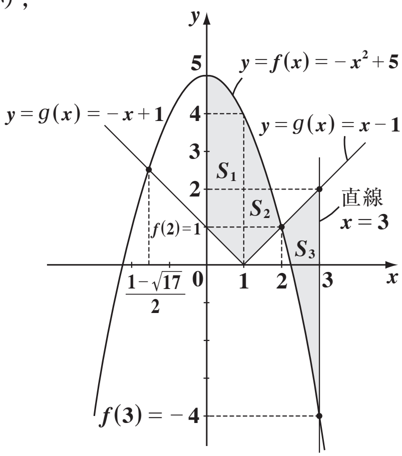
$\therefore x = 2$ となる。($x \geqq 1$ より $x = -3$ は不適)

$x < 1$ における①と②の交点の x 座標は，今回の問題では不要だけれど，一応求めておくと，$-x^2 + 5 = -x + 1$　$x^2 - x - 4 = 0$　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$

$x < 1$ より，$x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$ $(\fallingdotseq -1.56)$ となる。

$f(2) = -2^2 + 5 = 1$，$f(3) = -3^2 + 5 = -4$ より，

$0 \leqq x \leqq 3$ の範囲で，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで挟まれる図形を右図に網目部で示す。



このグラフから，求める面積 S は次のように **3** つに場合分けして，S_1，S_2，S_3 の和として求めることができる。

(i) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，

$$S_1 = \int_0^1 \{\underbrace{-x^2+5}_{f(x)\text{大}} - (\underbrace{-x+1}_{g(x)\text{小}})\}dx$$

(ii) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき，

$$S_2 = \int_1^2 \{\underbrace{-x^2+5}_{f(x)\text{大}} - (\underbrace{x-1}_{g(x)\text{小}})\}dx$$

(iii) $2 \leqq x \leqq 3$ のとき，$S_3 = \displaystyle\int_2^3 \{\underbrace{x-1}_{g(x)\text{大}} - (\underbrace{-x^2+5}_{f(x)\text{小}})\}dx$

以上 (i), (ii), (iii) より，求める面積 S は，

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$= \int_0^1 (-x^2+x+4)dx + \int_1^2 (-x^2-x+6)dx + \int_2^3 (x^2+x-6)dx$$

$$= \underbrace{\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x\right]_0^1}_{\substack{-\frac{1}{3}\cdot 1^3+\frac{1}{2}\cdot 1^2+4\cdot 1-0 \\ =-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+4=\frac{-2+3+24}{6} \\ =\frac{25}{6}}} + \underbrace{\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_1^2}_{\substack{-\frac{8}{3}-2+12 \\ -\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+6\right) \\ =-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+4 \\ =\frac{-14+3+24}{6}=\frac{13}{6}}} + \underbrace{\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x\right]_2^3}_{\substack{9+\frac{9}{2}-18 \\ -\left(\frac{8}{3}+2-12\right) \\ =1+\frac{9}{2}-\frac{8}{3} \\ =\frac{6+27-16}{6}=\frac{17}{6}}}$$

$$= \underbrace{\frac{25}{6}}_{S_1} + \underbrace{\frac{13}{6}}_{S_2} + \underbrace{\frac{17}{6}}_{S_3}$$

$$= \frac{25+13+17}{16} = \frac{55}{6}$$ である。……………………………………………………(答)

どう？正確に求められた？この後，様々な面積公式を利用して，メンドウな積分計算を行わなくても，面積が算出される問題について詳しく解説していくつもりだ。しかし，このように，便利な面積公式が利用できないような問題もよく出題されるので，そのときは今回のように，場合分けして迅速に正確に積分計算を行う必要があるんだね。

この例題で何度も練習して，自力で短時間で結果が導けるようになると，たとえ，本番の試験で面積公式が使えない問題に直面しても，自信をもって問題を解いていくことができると思う。頑張ろうな！