

右図に示すように、 $AB = \sqrt{3}$ 、 $BC = 2$ 、

$CA = 1$ で、 $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形

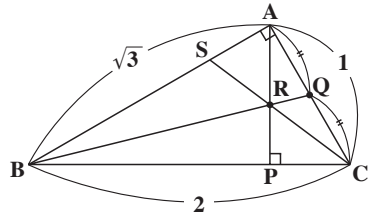
$\triangle ABC$ がある。頂点 A から辺 BC

に下した垂線の足を P 、辺 AC の中点

を Q とおき、線分 AP と線分 BQ の交点

を R とおく。また、直線 CR と辺 AB の

交点を S とおく。



(1) 線分 PC の長さを求めよ。

(2) 次の2つの線分の長さの比を求めよ。(i) $AS : SB$, (ii) $AR : RP$

(1) $\triangle APC$ は、 $AP : PC : CA = \sqrt{3} : 1 : 2$ で、 $\angle APC = 90^\circ$ の直角三角形であることに着目しよう。(2)(i) では、 $AS : SB = m : n$ とおいて、チェバの定理を利用しよう。また、(ii) では、 $AR : RP = u : v$ とおいてメネラウスの定理を利用すればいいんだね。

(1) 図 1 に示すように、 $\triangle APC$ に着目すると、

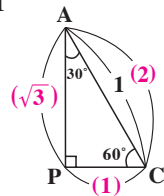
これは辺の比が、 $AP : PC : CA = \sqrt{3} : 1 : 2$

で $\angle APC = 90^\circ$ の直角三角形より、

$$PC : \underbrace{1}_{CA} = 1 : 2 \quad \text{よって、} 2 \cdot PC = 1^2$$

$$\therefore PC = \frac{1}{2} \quad \text{である。}$$

図 1



(辺の長さの比は、
() を付けて示す。)

(2) (i) 比 $AS : SB$ について、

図 2 に示すように、

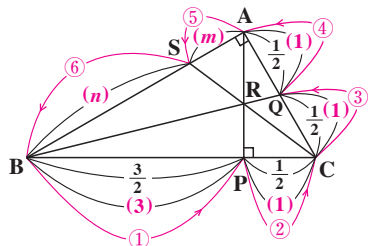
$$BP = BC - PC = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore BP : PC = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3 : 1 \quad \text{となる。}$$

また、点 Q は辺 CA の中点より、

$$CQ : QA = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1 : 1 \quad \text{となる。}$$

図 2 チェバの定理



よって、 $AS : SB = m : n$ とおくと、図 2 に示すように、チェバの定理が利用できるので、

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{1} \times \frac{n}{m} = 1 \text{ となる。} \quad \therefore \frac{n}{m} = 3 = \frac{3}{1}$$

$$\left[\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \times \frac{\textcircled{4}}{\textcircled{3}} \times \frac{\textcircled{6}}{\textcircled{5}} = 1 \right]$$

よって、求める線分の長さの比 $AS : SB$ は、

$$AS : SB = m : n = 1 : 3 \text{ である。}$$

(ii) 比 $AR : RP$ について、

図 3 に示すように、

$$BP : PC = 3 : 1,$$

$$CQ : QA = 1 : 1 \text{ より、}$$

$$AR : RP = u : v \text{ と}$$

おくと、メネラウスの定理を用いて、

$$\frac{4}{3} \times \frac{1}{1} \times \frac{v}{u} = 1 \text{ となる。}$$

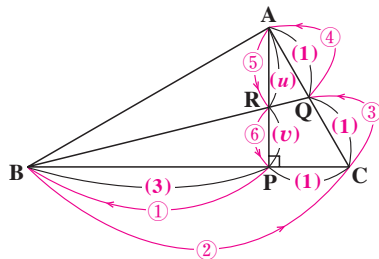
$$\left[\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \times \frac{\textcircled{4}}{\textcircled{3}} \times \frac{\textcircled{6}}{\textcircled{5}} = 1 \right]$$

$$\therefore \frac{v}{u} = \frac{3}{4}$$

よって、求める線分の長さの比 $AR : RP$ は、

$$AR : RP = u : v = 4 : 3 \text{ である。}$$

図 3 メネラウスの定理



これで、チェバの定理とメネラウスの定理について、その利用法もマスターできたと思う。

以上で今日の講義も終了です！みんな、よく頑張ったね。かなり、内容が濃かったと思うから、次回の講義まで、何度でも自分が納得がいくまで、ヨ〜ク復習しておいてくれ。

それじゃ、次回の講義でまた会おうな！さようなら……。