演習問題 11 の参考

2 質点系のばねによる振動において生じ得る“**うなり**”(*beat*) についても解説しておこう。**2** 質点系のばねによる振動は，**2** つの基準振動の合成によって表されるわけだけれど，この **2** つの基準振動の角振動数 ω_1 と ω_2 の差がわずかであるときに，うなりという現象が生じることになるんだね。

これから，具体的に数式で解説していこう。**1** つの振動子の連成振動の解は **2** つの角振動数 ω_1 と ω_2 の基準振動の合成として，次式で表されるのは大丈夫だね。

$$x_1 = \underbrace{C_1}_{C}\cos(\underbrace{\omega_1}_{\omega+\Delta\omega} t + \underbrace{\phi_1}_{0}) + \underbrace{C_2}_{C}\cos(\underbrace{\omega_2}_{\omega-\Delta\omega} t + \underbrace{\phi_2}_{0}) \cdots\cdots ①$$

ここで，式の変形を簡単にするために，**2** つの初期位相 ϕ_1 と ϕ_2 は共に **0** とし，**2** つの係数 C_1 と C_2 は共に同じく $C_1 = C_2 = C$ とおくことにする。そして，**2** つの基準振動の角振動数 ω_1 と ω_2 は $\omega_1 \fallingdotseq \omega_2$ とし，これをさらに ω と $\Delta\omega$ $(\Delta\omega \ll \omega)$ を用いて $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$，$\omega_2 = \omega - \Delta\omega$ とする。つまり，ω_1 と ω_2 の差はわずかなものとして，$\omega_1 - \omega_2 = 2\Delta\omega$ としたんだね。

以上より，①は次のように変形することができる。

$$x = C\cdot\cos(\omega+\Delta\omega)t + C\cdot\cos(\omega-\Delta\omega)t$$
$$= C\{\cos(\underbrace{\omega t + \Delta\omega t}_{(\alpha+\beta)}) + \cos(\underbrace{\omega t - \Delta\omega t}_{(\alpha-\beta)})\}$$
$$= 2C\cdot\cos\underbrace{\omega t}_{\alpha}\cdot\cos\underbrace{\Delta\omega t}_{\beta}$$

公式：
$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$
$= 2\cos\alpha\cos\beta$

$$\therefore\ x = \underbrace{2C\cos\Delta\omega t}\cdot\cos\omega t \cdots\cdots ②$$

これは，時刻 t により，ゆっくりと変動する振幅 $A(t)$ と考える。

$\Delta\omega \ll \omega$ より，$\cos\Delta\omega t$ と $\cos\omega t$ の周期をそれぞれ T_1，T_2 とおくと，$T_1 = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$，$T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega}$ より，$T_1 \gg T_2$ となる。

となるんだね。

ここで，②の $2C\cos\Delta\omega t$ は周期の大きいゆっくりとした振動を表すので，これを x の変動する振幅 $A(t)$ とおくと，②は，$x = A(t)\cos\omega t$ となる。

$\cos\omega t$ は周期の短い波動

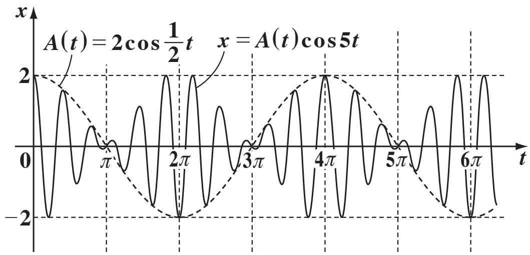
よって，x は，$\cos\omega t$ により短い周期の振動をしながら，その振幅 $A(t)$ は，ゆっくりと大きく変動することになるので，②は，ウォーン，ウォーン，…という“**うなり**”という現象を表す方程式になっているんだね。

それでは，②式のうなりの方程式のグラフを具体的に示そう。$C=1$，$\Delta\omega=\dfrac{1}{2}$ とし，$\omega=5,\ 8,\ 15$ の 3 通りに変化させて 3 つのグラフを描いてみよう。

(i) $C=1$，$\Delta\omega=\dfrac{1}{2}$，$\omega=5$ のときの②式：

$$x=\underbrace{2\cos\frac{1}{2}t}_{A(t)\ (\text{うなりの振幅})}\cdot\cos 5t$$

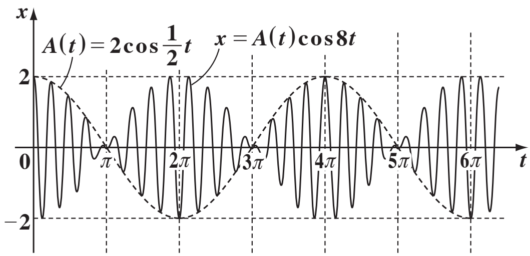
のグラフを右に示す。



(ii) $C=1$，$\Delta\omega=\dfrac{1}{2}$，$\omega=8$ のときの②式：

$$x=\underbrace{2\cos\frac{1}{2}t}_{A(t)\ (\text{うなりの振幅})}\cdot\cos 8t$$

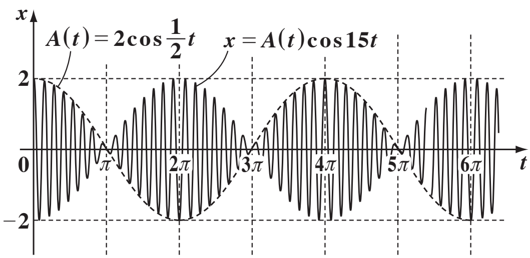
のグラフを右に示す。



(iii) $C=1$，$\Delta\omega=\dfrac{1}{2}$，$\omega=15$ のときの②式：

$$x=\underbrace{2\cos\frac{1}{2}t}_{A(t)\ (\text{うなりの振幅})}\cdot\cos 15t$$

のグラフを右に示す。



どう？ω が 5，8，15 と $\Delta\omega=\dfrac{1}{2}$ との差が大きくなるにつれて，ウォーン，ウォーン，…という，うなりの現象が，より明確に表現されていく様子が分かって，面白いでしょう？