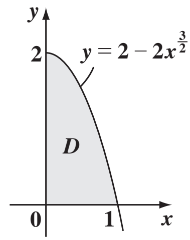
絶対暗記問題 68　難易度 ★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

曲線 $y = 2 - 2x^{\frac{3}{2}}$ $(x \geqq 0)$ と x 軸と y 軸とで囲まれる図形を D とおく。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 図形 D の面積 S を求めよ。

(2) 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(3) 曲線 $y = 2 - 2x^{\frac{3}{2}}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ L を求めよ。



ヒント！ (1) の図形 D の面積 S は，$S = \int_0^1 (2 - 2x^{\frac{3}{2}})dx$ で求めよう。(2) では，D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求める公式として，$V = \pi \int_0^2 x^2 dy$ を利用しよう。(3) の曲線の長さ L は，公式：$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ を使えばいいんだね。頑張ろう！

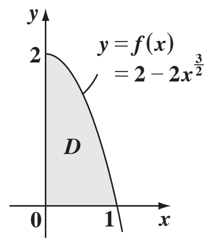
解答＆解説

(1) $y = f(x) = 2 - 2x^{\frac{3}{2}}$ ……① $(x \geqq 0)$ と x 軸と y 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めると，

$$S = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (2 - 2x^{\frac{3}{2}})dx$$

$$= \left[2x - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = 2 \cdot 1 - \frac{4}{5} \cdot 1^{\frac{5}{2}} = 2 - \frac{4}{5}$$

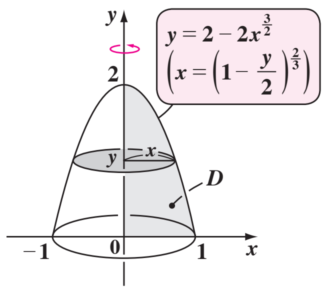
$$= \frac{10 - 4}{5} = \frac{6}{5}$$ である。………………(答)



(2) 関数 $y = f(x) = 2 - 2x^{\frac{3}{2}}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を $x = (y$ の式$)$ の形で表すと，

$2x^{\frac{3}{2}} = 2 - y$　　$x^{\frac{3}{2}} = 1 - \dfrac{y}{2}$

この両辺を $\dfrac{2}{3}$ 乗すると，



$x=\left(1-\dfrac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(0\leqq y\leqq 2)$ となる。よって，図形 D を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_0^2 \underbrace{x^2}_{\boxed{\left\{\left(1-\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^2}}\,dy=\pi\int_0^2\left(1-\frac{y}{2}\right)^{\frac{4}{3}}dy$$

$\left\{\left(1-\dfrac{y}{2}\right)^{\frac{7}{3}}\right\}'=\dfrac{7}{3}\left(1-\dfrac{y}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
$=-\dfrac{7}{6}\left(1-\dfrac{y}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$ となるので，
$\displaystyle\int\left(1-\frac{y}{2}\right)^{\frac{4}{3}}dy=-\frac{6}{7}\left(1-\frac{y}{2}\right)^{\frac{7}{3}}+C$ となるんだね。

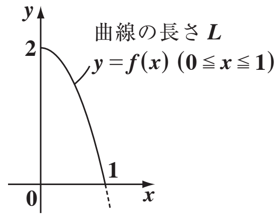
$$=-\frac{6}{7}\pi\left[\left(1-\frac{y}{2}\right)^{\frac{7}{3}}\right]_0^2$$

$$=-\frac{6}{7}\pi\left(0^{\frac{7}{3}}-1^{\frac{7}{3}}\right)=-\frac{6}{7}\pi\times(-1)$$

$=\dfrac{6}{7}\pi$ である。……………………………………………………(答)

(3) ①を x で微分すると，$y'=\left(2-2\cdot x^{\frac{3}{2}}\right)'=-2\times\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=-3\sqrt{x}$ となる。

よって，求める曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の長さ L を求めると，



$$L=\int_0^1\sqrt{1+\underbrace{(y')^2}_{\boxed{(-3\sqrt{x})^2=9x}}}\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{9x+1}\,dx$$

$\left\{(9x+1)^{\frac{3}{2}}\right\}'=\dfrac{3}{2}\cdot(9x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 9=\dfrac{27}{2}(9x+1)^{\frac{1}{2}}$
より，
$\displaystyle\int(9x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{27}(9x+1)^{\frac{3}{2}}+C$ となる。

$$=\frac{2}{27}\left[(9x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$=\dfrac{2\left(10\sqrt{10}-1\right)}{27}$ である。……………………………………………………(答)