練習問題 53　正規分布の確率計算 (Ⅱ)　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

次の各確率を求めよ。(ただし，右の標準正規分布の確率の表を利用してよい。)

(1) 正規分布 $N(4,\ 400)$ に従う確率変数 X が，$8 \leqq X \leqq 12$ となる確率 $P(8 \leqq X \leqq 12)$

(2) 正規分布 $N(10,\ 9)$ に従う確率変数 X が，$X \leqq 8.2$ となる確率 $P(X \leqq 9.2)$

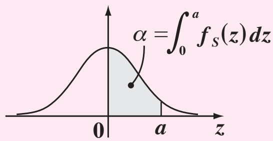
標準正規分布の確率の表

$$\alpha = \int_0^a f_S(z)\,dz$$

a	確率 α
0.2	0.0793
0.3	0.1179
0.4	0.1554
0.5	0.1915
0.6	0.2257

$\left(f_S(z)：\text{標準正規分布の確率密度} \right)$

演習問題 52(P222) と同様の問題なんだけれど，利用する標準正規分布の確率の表の確率 α が，$\alpha = \int_0^a f_S(z)\,dz$ となっていて，右図に示すように，z が，$0 \leqq z \leqq a$ の範囲となる確率になっていることに気を付けよう。この形の確率の表は，共通テスト数学Ⅱ·Bでも採用されることがあるので，ここでよく練習しておくといいんだね。



(1) 正規分布 $N(\underbrace{4}_{m},\ \underbrace{400}_{\sigma^2})$ の平均 $m = 4$，標準偏差 $\sigma = \sqrt{400} = 20$ より，

これに従う確率変数 X を使って，新たな確率変数 Z を $Z = \dfrac{X - m}{\sigma} = \dfrac{X - 4}{20}$ で定義する。すると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数になる。よって，

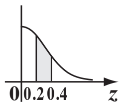
$8 \leqq X \leqq 12$ を変形すると，← これを，Z の値の範囲に書き換える。

$4 \leqq X - 4 \leqq 8$ ← 各辺から $4\,(=m)$ を引いた。

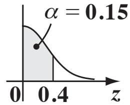
$\underbrace{\dfrac{4}{20}}_{0.2} \leqq \underbrace{\dfrac{X-4}{20}}_{Z} \leqq \underbrace{\dfrac{8}{20}}_{0.4}$ ← 各辺を $20\,(=\sigma)$ で割った。

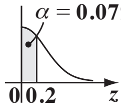
$\therefore\ 0.2 \leqq Z \leqq 0.4$ となる。よって，求める確率 $P(8 \leqq X \leqq 12)$ は，

$P(8 \leqq X \leqq 12) = P(0.2 \leqq Z \leqq 0.4)$



$= P(0 \leqq Z \leqq 0.4) - P(0 \leqq Z \leqq 0.2)$



−


$= 0.1554 - 0.0793 = 0.0761$ となって，答えだ。

(2) 正規分布 $N(\underbrace{10}_{m},\ \underbrace{9}_{\sigma^2})$ の平均 $m = 10$，標準偏差 $\sigma = \sqrt{9} = 3$ より，

これに従う確率変数 X を使って，新たな確率変数 Z を $Z = \dfrac{X-m}{\sigma} = \dfrac{X-10}{3}$ で定義すると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数となる。よって，

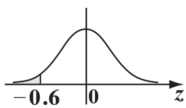
$X \leqq 8.2$ を変形すると，　← これを，Z の値の範囲に書き換える。

$X - 10 \leqq \underbrace{-1.8}_{8.2-10}$　← 両辺から $10(=m)$ を引いた。

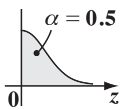
$\underbrace{\dfrac{X-10}{3}}_{Z} \leqq \underbrace{-\dfrac{1.8}{3}}_{-0.6}$　← 両辺を $3(=\sigma)$ で割った。

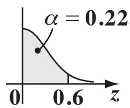
$\therefore Z \leqq -0.6$ となる。よって，求める確率 $P(X \leqq 8.2)$ は，

$P(X \leqq 8.2) = P(Z \leqq -0.6)$



$= \quad 0.5 \quad - \quad P(0 \leqq Z \leqq 0.6)$



−


$= 0.5 - 0.2257 = 0.2743$ と答えが求まるんだね。

どう？これで，$\alpha = \int_0^{a} f_S(z)dz$ の確率の表の利用の仕方もマスターできたと思う。$\alpha = \int_a^{\infty} f_S(z)dz$ の確率の表と同様に，うまく使いこなせるように練習しよう！