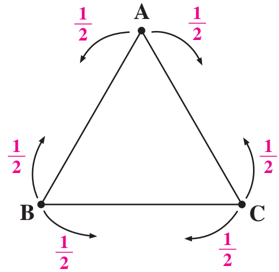
補充問題 3	難易度 ★★	確率と漸化式

右図に示すような三角形 A, B, C と動点 P がある。表と裏が $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを投げ，表が出たら点 P を時計回りに隣りの次の頂点へ，また裏が出たら反時計回りに隣りの次の頂点に移動する試行を繰り返し行う。動点 P が頂点 A から移動を開始するとき，n 回目の試行の後で頂点 A にいる確率を $P_n(A)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とおく。次の各問いに答えよ。



(1) $P_1(A)$ を求めよ。

(2) $P_n(A)$ と $P_{n+1}(A)$ の関係式（漸化式）を求めよ。

(3) $P_n(A)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。　　　（横浜市大＊）

ヒント！ (1) 初めに P は点 A にいるので $n=1$ 回目の試行後は，B または C に移動する。(2) $P_n(A)$ と $P_{n+1}(A)$ の模式図を描いて，$P_n(A)$ と $P_{n+1}(A)$ の漸化式を求めよう。(3)(2) で求めた漸化式を等比関数列型漸化式を利用して解いていこう。

解答＆解説

(1) 初めに動点 P は頂点 A にいるので，この試行を $n=1$ 回行えば，P は B または C に移動して，A には存在しない。

$\therefore P_1(A)=0$ である。……………………………(答)

(2) n 回目の試行後に P が A にいる確率が $P_n(A)$ であり，A にいない，すなわち B または C にいる確率は $1-P_n(A)$ となる。

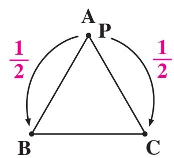
よって，第 n 回目の試行後に，

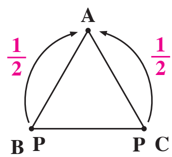
・P が A にいる確率は，$P_n(A)$

・P が B または C にいる確率は $1-P_n(A)$ で

あり，第 $n+1$ 回目の試行後に，P が A にいる

ココがポイント

⇦ 

⇦ 

確率 $\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{A})$ は，次の模式図を利用して求めることができる。

第 n 回目　　　　　　　　　第 $n+1$ 回目

$\mathbf{P}_n(\mathbf{A})$ (**A** にいる) $\xrightarrow{\ 0\ }$ $\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{A})$

$1-\mathbf{P}_n(\mathbf{A})$ (**B**, **C** にいる) $\xrightarrow{\ \frac{1}{2}\ }$ $\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{A})$

この模式図より，$\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{A})$ は次式で表される。

$$\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{A}) = \cancel{0\cdot\mathbf{P}_n(\mathbf{A})} + \frac{1}{2}\cdot\{1-\mathbf{P}_n(\mathbf{A})\}$$

$$\therefore \mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{A}) = -\frac{1}{2}\mathbf{P}_n(\mathbf{A}) + \frac{1}{2} \ \cdots ①\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が導かれる。……………………………………(答)

(3) 以上 (1), (2) の結果より，

$$\begin{cases} \mathbf{P}_1(\mathbf{A}) = 0 \\ \mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{A}) = -\dfrac{1}{2}\mathbf{P}_n(\mathbf{A}) + \dfrac{1}{2} \ \cdots ① \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

①の特性方程式：$x = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ の解は，

$x = \dfrac{1}{3}$ より，これを用いて，①を変形して，

$$\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{A}) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left\{\mathbf{P}_n(\mathbf{A}) - \frac{1}{3}\right\}$$

$$\left[\ F(n+1) = -\frac{1}{2}\cdot F(n)\ \right]$$

アッという間！

よって，

$$\mathbf{P}_n(\mathbf{A}) - \frac{1}{3} = \Big\{\underbrace{\cancel{\mathbf{P}_1(\mathbf{A})}}_{\boxed{0}} - \frac{1}{3}\Big\}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left[\ F(n) = F(1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ \right]$$

これに，$\mathbf{P}_1(\mathbf{A}) = 0$ を代入すると，

求める一般項 $\mathbf{P}_n(\mathbf{A})$ は，次のように求められる。

$$\mathbf{P}_n(\mathbf{A}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

……(答)

⇦ ・n 回目に **P** が **A** にいると，$n+1$ 回目には移動して **A** にいることはない。
・n 回目に **P** が **A** にいない，すなわち，**B** または **C** にいるとき，このいずれの場合においても，**P** は $\frac{1}{2}$ の確率で **A** に移動する。

⇦ $\mathbf{P}_n(\mathbf{A}) = \mathbf{P}_n$, $\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}_{n+1}$ と略記すると，
$\mathbf{P}_{n+1} = -\frac{1}{2}\mathbf{P}_n + \frac{1}{2}$ より，
この特性方程式は，
$x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
これを解いて，
$\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$ より，$x = \frac{1}{3}$
∴①は，次のように変形できる。
$\mathbf{P}_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_n - \frac{1}{3}\right)$

⇦ 等比関数列型漸化式による解法
$F(n+1) = -\frac{1}{2}F(n)$ より，
$F(n) = F(1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$