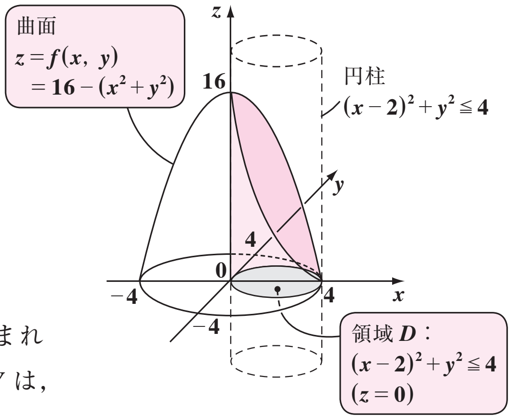
演習問題 138　● 立体の体積 (V) ●

xyz 座標空間に，放物面体 $0 \leqq z \leqq 16 - (x^2 + y^2)$ と円柱 $(x-2)^2 + y^2 \leqq 4$ がある。この 2 つの立体の共通部分の体積 V を求めよ。

ヒント！ $z = f(x,\ y) = 16 - (x^2 + y^2)$ とおき，xy 平面上の領域 $D : (x-2)^2 + y^2 \leqq 4$ $(z = 0)$ とおくと，求める共通部分の立体の体積 V は，$V = \iint_D f(x,\ y)dxdy$ となる。ここで，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて，極座標 r と θ による積分に置き換えて解いていけばよい。

解答＆解説



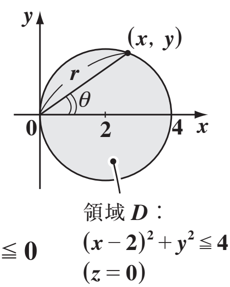
放物面体と円柱，すなわち，

$$\begin{cases} 0 \leqq z \leqq 16 - (x^2 + y^2) & \text{と} \\ (x-2)^2 + y^2 \leqq 4 & \text{との} \end{cases}$$

共通部分の立体の体積 V は，右に示すように，xy 平面上の領域 $D : (x-2)^2 + y^2 \leqq 4$ $(z = 0)$ において，曲面 $z = f(x,\ y) = 16 - (x^2 + y^2)$ と xy 平面とで挟まれる立体の体積と等しい。よって，V は，

$$V = \iint_D f(x,\ y)dxdy$$

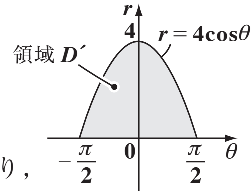
$$= \iint_D \{16 - (x^2 + y^2)\}dxdy \quad \cdots\cdots①$$ で求められる。



ここで，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて，領域 $D : (x-2)^2 + y^2 \leqq 4$ $(z = 0)$ を r と θ で表すと，

$$\underbrace{(r\cos\theta - 2)^2}_{r^2\cos^2\theta - 4r\cos\theta + \cancel{4}} + r^2\sin^2\theta \leqq \cancel{4} \qquad r^2(\underbrace{\cancel{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}_{1}) - 4r\cos\theta \leqq 0$$

$$r(r - 4\cos\theta) \leqq 0 \qquad \therefore\ 0 \leqq r \leqq 4\cos\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$



よって，領域 D を極座標系の新領域

D'：$0 \leqq r \leqq 4\cos\theta \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ に変換すると，

①の被積分関数は，

$$16-(x^2+y^2) = 16-\underbrace{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)}_{\boxed{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2}} = 16-r^2$$ となり，

また，ヤコビアン $J = \dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$ となる。

よって，①の積分を極座標 $r,\ \theta$ での積分に置換して求めると，

$$V = \iint_{D'} (16-r^2)\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Bigg\{ \underbrace{\int_0^{4\cos\theta} (16r - r^3)\,dr}_{\boxed{\left[8r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^{4\cos\theta} = 128\cos^2\theta - 64\cos^4\theta}} \Bigg\} d\theta$$

$$= 64 \times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(2\cos^2\theta - \cos^4\theta)}_{\boxed{\text{偶関数}}}\,d\theta$$

$$= 128\Bigg(2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta}_{\boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta}_{\boxed{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi}}\Bigg)$$

ウォリスの公式
$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$
について，
$J_n = \dfrac{n-1}{n}\cdot J_{n-2}$

$$= 128\left(2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{3}{16}\pi\right) = 128 \times \frac{5}{16}\pi$$

∴求める立体の体積 $V = 40\pi$ ……………………………………………(答)