★★★元気に伸びる数学Ⅲ問題集★★★
補充問題（additional question）

補充問題 1	難易度 ★★	微分方程式

次の微分方程式を各条件の下で解き，そのグラフの概形を描け。

(1) $y' = -\dfrac{x}{y}$ ……① （$y \neq 0$，条件：$x=1$ のとき，$y=\sqrt{3}$）

(2) $y' = \dfrac{2y}{x}$ ……② （$x \neq 0$，$y \neq 0$，条件：$x=1$ のとき，$y=2$）

ヒント！ (1), (2) ともに，変数分離形の微分方程式なので，$\int f(y)dy = \int g(x)dx$ の形にして求めればいいんだね。(1)，(2) いずれも，条件が付いているので，不定積分の結果出てくる積分定数 C の値も決まる。(1) は円の方程式，(2) は放物線の方程式が導かれるはずだ。グラフの概形までしっかり描こう！

解答＆解説

(1) ①より，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ （$y \neq 0$） この両辺に $y \cdot dx$ をかけて

$ydy = -xdx$ より，

$$\int ydy = -\int xdx$$

変数分離形：$f(y)dy = g(x)dx$ の形になったので，後は両辺に $\int$ (インテグラル) を付けて，不定積分にもち込もう。

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 \quad (C_1：定数)$$

$\frac{1}{2}y^2 + C_1' = -\frac{1}{2}x^2 + C_2'$ （C_1', C_2'：定数）となる。これをまとめて，$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$ （$C_1 = C_2' - C_1'$）としたんだね。

となる。よって，両辺に 2 をかけて，

$$y^2 = -x^2 + \underbrace{2C_1}_{これを新たな定数C とおく}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = C \quad ……③ \quad (C = 2C_1，y \neq 0) \text{ となる。}$$

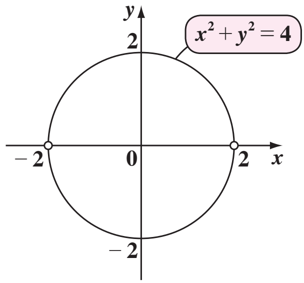
$y \neq 0$ の条件は付くが，円の方程式が導けた！

ここで，条件：$x=1$ のとき $y=\sqrt{3}$ より，これらを③に代入して，

$1^2 + (\sqrt{3})^2 = C$ $\therefore C = 1 + 3 = 4$ である。

これを③に代入すると，①の解として，

円の方程式：$x^2+y^2=4$　(ただし，$y \neq 0$)
が求められる。 ……………………………(答)
よって，このグラフは，原点を中心とする半径 2 の円である。(ただし，2 点 $(2,\ 0)$ と $(-2,\ 0)$ を除く。) このグラフの概形を右に示す。 ……………………………………(答)



(2) ②より，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{x}$　$(x \neq 0,\ y \neq 0)$

この両辺を y で割り，両辺に dx をかけると，

$\dfrac{1}{y}dy=\dfrac{2}{x}dx$　となる。よって，　← 変数分離形：$f(y)dy=g(x)dx$

$\displaystyle\int\frac{1}{y}dy=2\int\frac{1}{x}dx$　　$\log|y|=\underbrace{2\log|x|+C_1}_{\log\underbrace{|x|^2}_{x^2}+\log e^{C_1}=\log e^{C_1}x^2}$　$(C_1$：定数) となる。

$\log|y|=\log e^{C_1}x^2$　両辺の真数同士を比較して，

$|y|=e^{C_1}x^2$　　$y=\underbrace{\pm e^{C_1}}_{\text{これを新たな定数 }C\text{ とおく}}x^2$

$\therefore\ y=Cx^2$ ……④　$(C=\pm e^{C_1},\ x \neq 0,\ y \neq 0)$　となる。

ここで，条件：$x=1$ のとき $y=2$ より，これらを④に代入して，

$2=C\cdot 1^2$　$\therefore\ C=2$　である。

これを④に代入して，②の解として，

放物線の方程式：$y=2x^2$ (ただし，$x \neq 0,\ y \neq 0$) が求められる。…(答)

よって，このグラフは，原点を頂点とする下に凸の放物線である。(ただし，原点 $(0,\ 0)$ を除く。)
このグラフの概形を右に示す。……(答)