| 練習問題 61 | $a_{n+1}=pa_n+qn$ の極限 | CHECK 1 | CHECK 2 | CHECK 3 |
|---|---|---|---|---|

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+3n$ ……① $(n=1, 2, 3, \cdots)$ で定義されているとき，次の各問いに答えよ。

(1) ①を変形して，$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(a_n+\alpha n+\beta)$ …② とするとき，定数 $\alpha$，$\beta$ の値を求めよ。

(2) 一般項 $a_n$ を求めて，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}$ を求めよ。その際に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$ を用いてもよいものとする。

(1)の②は $F(n+1)=2\cdot F(n)$ の形なので，$\alpha$，$\beta$ の値が分かれば，(2) で，一般項 $a_n$ はすぐに求められる。その際に，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$ が出てきて，これは $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形だけれど，$\frac{(弱い\infty)}{(強い\infty)}$ なので，0 に収束することが問題文で示されているんだね。

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+3n$ ……① $(n=1, 2, 3, \cdots)$ より，

①を変形して，

$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=2(a_n+\alpha n+\beta)$ ……② になったものとする。

$[\quad F(n+1) \quad = 2\cdot \quad F(n) \quad]$

$F(n)=a_n+\underbrace{\alpha n+\beta}_{n\text{ の 1 次式}}$ とおくと，$n$ の代わりに $n+1$ を代入して，$F(n+1)=a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta$ となる。

②を変形すると，

$a_{n+1}+\alpha n+\alpha+\beta=2a_n+2\alpha n+2\beta$，$a_{n+1}=2a_n+2\alpha n-\alpha n+2\beta-\alpha-\beta$

$a_{n+1}=2a_n+\underbrace{\alpha}_{3}n+\underbrace{\beta-\alpha}_{0}$ ……②′ となる。よって，②′と①を比較すると，

①と比較して

$\alpha=3$，$\beta-\alpha=0$ より，　$\therefore\ \alpha=3$，$\beta=3$ である。

(2) $\alpha=3$，$\beta=3$ を②に代入すると，

$a_{n+1}+3(n+1)+3=2(a_n+3n+3)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ より，

$[\quad F(n+1) \quad =2\cdot \quad F(n) \quad]$

アッ！という間

$a_n+3n+3=(a_1+3\cdot 1+3)\cdot 2^{n-1}$ ……③ となる。

$[\quad F(n) \ = \quad F(1) \quad \cdot 2^{n-1}\ ]$

$$a_n+3n+3=(\underbrace{a_1}_{2}+3+3)\cdot 2^{n-1} \quad \cdots\cdots ③$$ に $a_1=2$ を代入すると，

$$a_n=\underbrace{8\times 2^{n-1}}_{2^3\times 2^{n-1}=2^{n+2}}-3n-3$$ より，

一般項 $a_n$ は，$a_n=2^{n+2}-3n-3 \quad \cdots\cdots ④ \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる。

④より，求める数列の極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}$ は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-3n-3}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\boxed{\frac{2^{n+2}}{2^n}}-3\cdot\cancel{\frac{n}{2^n}}-\cancel{\frac{3}{2^n}}\right)$$

$2^2=4$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$ より → $0$　　$\frac{3}{\infty}=0$

$=4-0-0=4$　となるんだね。

ここで，$\frac{n}{2^n}$ について，$2^{10}=1024\fallingdotseq 1000=10^3$ より，

・$n=10$ のとき，$\frac{10}{2^{10}}\fallingdotseq\frac{10}{10^3}=\frac{1}{100}$　・$n=20$ のとき，$\frac{20}{2^{20}}\fallingdotseq\frac{20}{(10^3)^2}=\frac{2}{100000}$

・$n=30$ のとき，$\frac{30}{2^{30}}\fallingdotseq\frac{30}{(10^3)^3}=\frac{3}{100000000}\fallingdotseq 0$，$\cdots$　となって，

$n\to\infty$ のとき，$\frac{n}{2^n}\to 0$ となることが分かるでしょう？

## ● 対称形の連立の漸化式にもチャレンジしてみよう！

連立方程式では，2つの未知数 $x$ と $y$ を求めたように，連立の漸化式では，2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の関係式になっているんだね。エッ！　急にハードルが高くなって，難しそうだって!?　確かに，レベルは少し上がるけれど，この解法も，等比関数列型の漸化式の考え方を使えば，シンプルに解けるので，そんなに心配する必要はないよ。

それではここで，対称形(たいしょうけい)の連立の漸化式と極限の問題を，例題を使って，具体的に紹介しよう。