区分求積法の応用

演習問題 75　難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

$Q_n = \left\{ \dfrac{(2n)!}{n^n \cdot n!} \right\}^{\frac{1}{n}}$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ について，次の各問いに答えよ。

(1) Q_n の自然対数 $\log Q_n$ を求めよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log Q_n$ を求めることにより，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q_n$ を求めよ。

ヒント！ コチコチに乾燥した干ししいたけなどは水につけてほぐすだろう？それと同様に今回の問題の $Q_n = \left\{ \dfrac{(2n)!}{n^n \cdot n!} \right\}^{\frac{1}{n}}$ のように，コチコチに固まった形の式は，自然対数をとって変形すれば，区分求積法の形が見えてくるんだね。チャレンジしてみよう！

解答＆解説

(1) まず，Q_n の式を変形すると，

$$Q_n = \left\{ \frac{1}{n^n} \cdot \underbrace{\frac{(2n)!}{n!}}_{=(n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots(n+n)} \right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left\{ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots(n+n)}{n^n} \right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left\{ \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \frac{n+3}{n} \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{(n+n)}{n} \right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore Q_n = \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{3}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1+\frac{n}{n}\right) \right\}^{\frac{1}{n}} \quad \cdots\cdots ①$$

$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる。

よって，Q_n は正より，①の両辺の自然対数をとると，

$$\log Q_n = \log\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{3}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1+\frac{n}{n}\right) \right\}^{\boxed{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{ \log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \log\left(1+\frac{2}{n}\right) + \log\left(1+\frac{3}{n}\right) + \cdots\cdots + \log\left(1+\frac{n}{n}\right) \right\}$$

$$\therefore \log Q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \cdots\cdots ② \quad \cdots\cdots\cdots (答)$$

ココがポイント

⇦ $\dfrac{(2n)!}{n!}$

$= \dfrac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n} \cdot (n+1)(n+2) \cdot \cdots \cdot 2n}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n}}$

$= (n+1)(n+2) \cdot \cdots \cdot 2n$

⇦分子の $(n+1)(n+2)\cdots(n+n)$ の n 項の積を $n^n = n \cdot n \cdot \cdots \cdot n$ の n 項の n で 1 つずつ割っていけばいい。

⇦①の自然対数をとると，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形の式になるので，この $n \to \infty$ の極限をとると，区分求積法の問題になるんだね。

⇦対数計算の公式：
・$\log x^p = p\log x$
・$\log xy = \log x + \log y$
を用いた。

(2) $\log Q_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\log\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}_{f\left(\frac{k}{n}\right)}$ ……② の $n\to\infty$ の極限をとると，区分求積法により，

$$\lim_{n\to\infty}\log Q_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1 \log(1+x)dx$$

$$=\int_0^1 (1+x)'\cdot\log(1+x)dx$$

$$=\underbrace{\left[(1+x)\cdot\log(1+x)\right]_0^1}_{2\log 2-1\cdot\underbrace{\cancel{\log 1}}_{0}}-\underbrace{\int_0^1(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}dx}_{\int_0^1 1\cdot dx=[x]_0^1=1}$$

$= 2\log 2 - 1$ ……③ となる。……(答)

③をさらに変形して，

$$\lim_{n\to\infty}\log Q_n = 2\log 2 - \underbrace{\log e}_{1}$$

$= \log 4 - \log e = \log\dfrac{4}{e}$ となる。

∴求める極限 $\lim_{n\to\infty} Q_n$ は，

$\lim_{n\to\infty} Q_n = \dfrac{4}{e}$ である。…………………………(答)

⇦区分求積法
$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

⇦ 被積分関数に，$(1+x)'(=1)$ をかけることにより，部分積分法にもち込む。
部分積分法：
$\int_0^1 f'\cdot g\,dx$
$=[f\cdot g]_0^1-\int_0^1 f\cdot g'dx$

⇦ $\lim_{n\to\infty}\log Q_n=\log\dfrac{4}{e}$ より，Q_n の極限が，$\lim_{n\to\infty}Q_n=\dfrac{4}{e}$ と求まるんだね。