絶対暗記問題 80	難易度 ★★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の 2 つの式を満たしている。

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^x f(t)dt = x\cdot g(x) - 2ax + 2 & \cdots\cdots① \quad (\text{ただし，}a\text{ は定数}) \\ \displaystyle g(x) = x^2 - x\int_0^1 f(t)dt - 3 & \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

このとき，定数 a の値と，関数 $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。　(上智大*)

ヒント！ ②について，$\int_0^1 f(t)\,dt = b$ (定数) とおいて，これを①に代入した後，①について，(i) $x=1$ を代入する，(ii) ①の両辺を x で微分する，という 2 つの操作を行い，解いていけばいいんだね。

解答&解説

$$\int_0^1 f(t)dt = b \ (\text{定数}) \ \cdots\cdots③$$

積分区間が [0，1] だから，この定積分は当然定数になる。

とおくと，②は，

$g(x) = x^2 - bx - 3$ ……②′ となる。

②′ を①に代入して，

$$\int_1^x f(t)dt = x\underbrace{(x^2 - bx - 3)}_{g(x)} - 2ax + 2$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt = x^3 - bx^2 - (3+2a)x + 2 \ \cdots\cdots①'$$

(i) ①′ に $x=1$ を代入して，

$$\underbrace{\int_1^1 f(t)dt}_{0} = \cancel{1}^3 - b\cdot 1^2 - (\cancel{3} + 2a)\cdot 1 + \cancel{2} = -b - 2a$$

$\therefore b = -2a$ ……④ となる。

(ii) ①′ の両辺を x で微分して，

$$\underbrace{\left\{\int_1^x f(t)dt\right\}'}_{f(x)} = 3x^2 - 2bx - 3 - 2a$$

$\therefore f(x) = 3x^2 - 2bx - 3 \underbrace{-2a}_{b\,(④より)}$ ……⑤ となる。

④を⑤に代入して，

$f(x) = 3x^2 - 2bx - 3 + b$ ……⑤´ となるので，

変数を x から t に替えると，

$f(t) = 3t^2 - 2bt - 3 + b$ ……⑤´´

⑤´´を③に代入して，

$$b = \int_0^1 (\underbrace{3t^2 - 2bt - 3 + b}_{f(t)})dt$$

$$= \left[t^3 - bt^2 + (b-3)t\right]_0^1$$

$$= 1^3 - \cancel{b \cdot 1^2} + (\cancel{b} - 3) \cdot 1$$

$\therefore b = -2$ ……⑥ より，これを④に代入して，$-2 = -2a$

$\therefore a = 1$ である。 ……………………………………………………(答)

⑥を⑤´と②´に代入して，

$f(x) = 3x^2 - 2 \cdot (-2)x - 3 - 2 = 3x^2 + 4x - 5$ である。………………(答)

$g(x) = x^2 - (-2) \cdot x - 3 = x^2 + 2x - 3$ である。 ……………………(答)