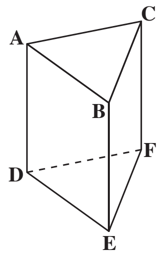
補充問題 4　難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

右の図のような三角柱 **ABC-DEF** が中心 **O**，半径 **1** の球に内接している。すなわち，三角柱の頂点 **A**，**B**，**C**，**D**，**E**，**F** はすべて，中心 **O**，半径 **1** の球面上にある。また，三角形 **ABC** と三角形 **DEF** は合同な正三角形で，四角形 **ADEB**，四角形 **BEFC**，四角形 **CFDA** は合同な長方形であるとする。



$\angle \mathrm{AOD} = 2\alpha$，$\angle \mathrm{AOB} = 2\beta$ とおく。ただし，$0^\circ < \alpha < 90^\circ$，$0^\circ < \beta < 60^\circ$ とする。

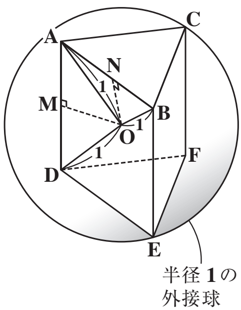
(1) $\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}$ の値を求めよ。

(2) 三角柱 **ABC-DEF** の体積 V を α を用いて表せ。　　(大阪市大＊)

ヒント！ **(1)** △**OAD** と△**OAB** について考えると話が見えてくるはずだ。**(2)** では，**(1)** の結果を利用して，三角柱 **ABC-DEF** の体積 V を $\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ で表すことができる。空間図形の応用問題だけれど頑張って解いてみよう。

(1) 半径 **1** の球に内接する三角柱 **ABC-DEF** の図を下に示す。

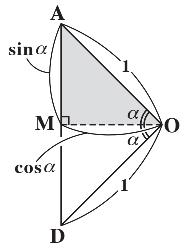
・△**OAD** について考えると **OA** と **OD** は外接球の半径 **1** に等しいので，



$\mathrm{OA} = \mathrm{OD} = 1$

よって，△**OAD** は，二等辺三角形である。ここで，

点 **O** より辺 **AD** に下した垂線の足を **M** とおくと，△**OAM** は，$\angle \mathrm{AOM} = \alpha$，$\angle \mathrm{AMO} = 90^\circ$ の直角三角形より，



$\mathrm{AM} = \sin\alpha$ ……①　$\boxed{\dfrac{\mathrm{AM}}{1} = \sin\alpha}$

$\mathrm{OM} = \cos\alpha$ ……②　$\boxed{\dfrac{\mathrm{OM}}{1} = \cos\alpha}$

①より，$\mathrm{AD} = 2\mathrm{AM} = 2\sin\alpha$ …③

となる。