練習問題 51　区分求積法(Ⅱ)　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

次の無限級数を定積分で表して，その値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin^2\frac{\pi}{n}+\sin^2\frac{2\pi}{n}+\sin^2\frac{3\pi}{n}+\sin^2\frac{4\pi}{n}+\cdots\cdots\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{2}{n}}+2e^{\frac{4}{n}}+3e^{\frac{6}{n}}+4e^{\frac{8}{n}}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right)$

(1)，(2) 共に変形して，区分求積法の公式：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$ が使える形にもち込んで，この定積分を計算すればいいんだね。(1)では半角の公式：$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$ を使い，(2) では部分積分法を利用して解いていこう。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\underbrace{\left(\sin^2\frac{1\cdot\pi}{n}+\sin^2\frac{2\cdot\pi}{n}+\sin^2\frac{3\cdot\pi}{n}+\sin^2\frac{4\cdot\pi}{n}+\cdots\cdots\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\sin^2\left(\pi\cdot\frac{k}{n}\right)}_{f\left(\frac{k}{n}\right)\text{ のこと}}$$

区分求積法：
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$

$$=\int_0^1 \underbrace{\sin^2\pi x}_{f(x)\text{ のこと}\ =\ \frac{1}{2}(1-\cos2\pi x)}\,dx$$

半角の公式：
$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$ より，
$\sin^2\pi x=\dfrac{1-\cos2\pi x}{2}$ となる。

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-\cos2\pi x)\,dx$$

$\displaystyle\int\cos mx\,dx=\frac{1}{m}\sin mx+C$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2\pi}\sin2\pi x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\cancel{\frac{1}{2\pi}\underbrace{\sin2\pi}_{0}}-\left(0-\cancel{\frac{1}{2\pi}\underbrace{\sin0}_{0}}\right)\right\}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

となって，答えだ！

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(1\cdot e^{\frac{2\cdot 1}{n}}+2\cdot e^{\frac{2\cdot 2}{n}}+3\cdot e^{\frac{2\cdot 3}{n}}+4\cdot e^{\frac{2\cdot 4}{n}}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\left(1\cdot e^{\frac{2\cdot 1}{n}}+2\cdot e^{\frac{2\cdot 2}{n}}+3\cdot e^{\frac{2\cdot 3}{n}}+4\cdot e^{\frac{2\cdot 4}{n}}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e^{2\cdot\frac{1}{n}}+\frac{2}{n}e^{2\cdot\frac{2}{n}}+\frac{3}{n}e^{2\cdot\frac{3}{n}}+\frac{4}{n}e^{2\cdot\frac{4}{n}}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{k}{n}e^{2\cdot\frac{k}{n}}}_{f\left(\frac{k}{n}\right)\text{のこと}}$$

区分求積法：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$

$$=\int_0^1\underbrace{x\cdot e^{2x}}_{f(x)\text{のこと}}dx$$

$(e^{2x})'=2\cdot e^{2x}$ より，

$\displaystyle\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$ となる。

$$=\int_0^1 x\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$$

部分積分法：

$\displaystyle\int f\cdot g'\,dx=f\cdot g-\int f'\cdot g\,dx$

$$=\left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1\underbrace{x'}_{1}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(1\cdot e^2-\cancel{0\cdot e^0})-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2-\underbrace{e^0}_{1})=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2-1)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)e^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(e^2+1)$$ となって，答えだ。

少し応用問題だったんだけれど，これで区分求積法にも慣れただろう？解説がよかったから，思ったより簡単だったって!? サンキュッ(^o^)//