ねじれの位置にある 2 直線 (II)

演習問題 80 難易度 ★★★ CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

点 $A(4,\ 2,\ 7)$ を通りベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ 4)$ に平行な直線を l，点 $B(2,\ 12,\ -5)$ を通りベクトル $\vec{b}=(1,\ 3,\ -3)$ に平行な直線を m とし，直線 l 上の点を P，直線 m 上の点を Q とする。線分 PQ が直線 l および直線 m と垂直であるものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P と点 Q の座標を求め，$\overrightarrow{PQ}$ を成分表示せよ。

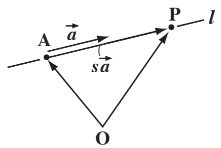
(2) 直線 m を含み，直線 l と平行な平面の方程式を求めよ。 (明治大 *)

ヒント！ (1) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+t\vec{b}$ (s, t：媒介変数) とおける。これから，$\overrightarrow{PQ}$ の成分が s と t の式で表されるんだね。後は $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{b}$ から，s と t の値を決定しよう。(2) の平面を π とおくと，平面 π は点 $B(2, 12, -5)$ を通り，法線ベクトル $\overrightarrow{QP}$ の平面になるんだね。

解答＆解説

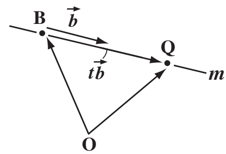
(1) 点 P は，点 $A(4,\ 2,\ 7)$ を通り，方向ベクトル $\vec{a}=(2, 1, 4)$ の直線 l 上の点より，次式が成り立つ。

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\vec{a}$$
$$=(4,\ 2,\ 7)+s(2,\ 1,\ 4)$$
$$=(2s+4,\ s+2,\ 4s+7)\cdots\cdots①\quad(s:\text{媒介変数})$$



同様に，点 Q は，点 $B(2,\ 12,\ -5)$ を通り，方向ベクトル $\vec{b}=(1,\ 3,\ -3)$ の直線 m 上の点より，次式が成り立つ。

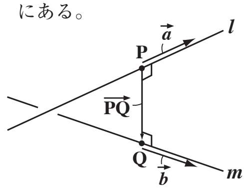
$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+t\vec{b}$$
$$=(2,\ 12,\ -5)+t(1,\ 3,\ -3)$$
$$=(t+2,\ 3t+12,\ -3t-5)\cdots②\quad(t:\text{媒介変数})$$



①，②より，$\overrightarrow{PQ}$ は次のように表される。

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\quad\leftarrow \boxed{\text{まわり道の原理}}$$
$$=(t+2,\ 3t+12,\ -3t-5)-(2s+4,\ s+2,\ 4s+7)$$
$$=(t-2s-2,\ 3t-s+10,\ -3t-4s-12)$$

⇦ l と m は，ねじれの位置にある。



ここで，線分 PQ は，直線 l と直線 m の両方に直交する。よって，

(i) $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{a}$ より，$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{a}=0\cdots\cdots③$ かつ，

(ii) $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{b}$ より，$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{b}=0\cdots\cdots④$ となる。

$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{b}$ より，
$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{a}=0$ かつ，
$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{b}=0$ となる。

(i) $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{a} = 2\cdot(t-2s-2)+1\cdot(3t-s+10)$

$\quad +4(-3t-4s-12)$

$\quad = \boxed{-7t-21s-42=0}$ ……③ より，

$t+3s+6=0$ ……③′ となる。

⇦ $\overrightarrow{PQ}=(t-2s-2,\ 3t-s+10,\ -3t-4s-12)$
$\vec{a}=(2,\ 1,\ 4)$

⇦ ③の両辺を -7 で割った。

(ii) $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{b} = 1\cdot(t-2s-2)+3(3t-s+10)$

$\quad -3\cdot(-3t-4s-12)$

$\quad = \boxed{19t+7s+64=0}$ ………④

⇦ $\overrightarrow{PQ}=(t-2s-2,\ 3t-s+10,\ -3t-4s-12)$
$\vec{b}=(1,\ 3,\ -3)$

以上 (i)，(ii) より，

$$\begin{cases} t+3s+6=0 \cdots\cdots ③' \\ 19t+7s+64=0 \cdots\cdots ④ \end{cases}$$ これを解いて，

$s=-1,\ t=-3$ となる。

⇦ ③′より，$t=-3s-6$ …③″
③″ を④に代入して，
$19(-3s-6)+7s+64=0$
$-50s-50=0 \quad \therefore s=-1$
③″ より，$t=-3$

これらを，①，②に代入して，

$\overrightarrow{OP}=(2,\ 1,\ 3)$，$\overrightarrow{OQ}=(-1,\ 3,\ 4)$

$\therefore$ P$(2,\ 1,\ 3)$，Q$(-1,\ 3,\ 4)$ である。 ………(答)

また，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(-3,\ 2,\ 1)$ である。

………(答)

⇦ $\overrightarrow{OP}=(2s+4,\ s+2,\ 4s+7)$ …①
$\overrightarrow{OQ}=(t+2,\ 3t+12,\ -3t-5)$ …②

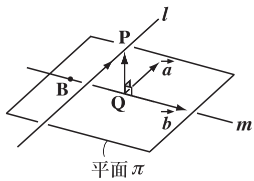
(2) 直線 m を含み，直線 l と平行な平面を π とおく。

右図から明らかに平面 π は，点 B$(2,\ 12,\ -5)$ を通り，法線ベクトル

$\overrightarrow{QP}=-\overrightarrow{PQ}=-(-3,\ 2,\ 1)=(3,\ -2,\ -1)$ をもつ平面である。よって，求める平面 π の方程式は，

$3(x-2)-2(y-12)-1\cdot(z+5)=0$ より，

$3x-2y-z+13=0$ である。 ……………………(答)



$\overrightarrow{QP}$ は $\overrightarrow{QP}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{QP}\perp\vec{b}$ をみたすので，平面 π の法線ベクトルになる。

平面 π は，点 Q$(-1,3,4)$ を通り，法線ベクトル $\overrightarrow{QP}=(3,\ -2,\ -1)$ の平面として，
$3(x+1)-2(y-3)-1\cdot(z-4)=0$
$3x-2y-z+13=0$ と求めても，もちろんいいよ。