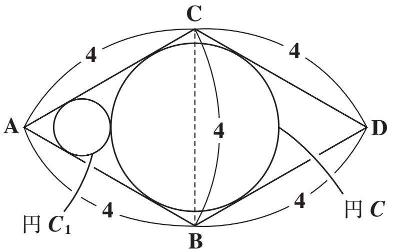
2円の外接条件(Ⅱ)

絶対暗記問題 68　難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

右図に示すように，**1** 辺の長さが **4** の **2** つの正三角形，△**ABC** と△**DBC** の辺 **BC** を重ねるようにして，ひし形 **ABDC** を作る。このとき，次の問いに答えよ。



(1) ひし形 **ABDC** に内接する円を C とおく。C の半径 r を求めよ。

(2) △**ABC** に内接し，円 C に外接する円を C_1 とおく。C_1 の半径 r_1 を求めよ。

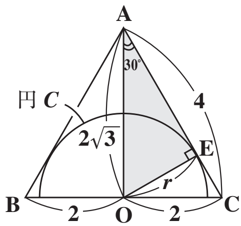
(3) 円 C と円 C_1 の面積比を求めよ。

ヒント！ (1)，(2) は，半径 r や r_1 と関係する，辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形を利用しよう。(3) r と r_1 が求められていれば，円 C と円 C_1 の面積比は $r^2:r_1{}^2$ になるんだね。

解答＆解説

(1) 右図に，**1** 辺の長さが **4** の正三角形△**ABC** と円 C(半円) を示す。

円 C の中心 **O** は，辺 **BC** の中点になるので，$\mathrm{OC}=2$，$\mathrm{AO}=2\sqrt{3}$ となる。中心 **O** から辺 **AC** に下した垂線の足を **E** とおくと，円 C の半径 r は $r=\mathrm{OE}$ ……① となる。

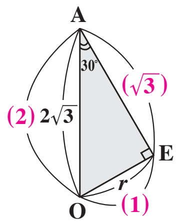


ここで，直角三角形 **AOE** に着目すると，$\angle\mathrm{OAE}=30°$ より，辺の比が

$\mathrm{AO}:\mathrm{OE}=2:1$ となる。よって，

$2\cdot\mathrm{OE}=1\cdot\mathrm{AO}$ より，

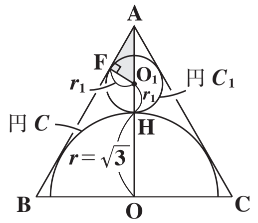
$\mathrm{OE}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AO}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$ となるので，



①より，$r=\mathrm{OE}=\sqrt{3}$ である。……(答)

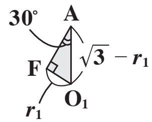
(2) 右図に示すように，円 C_1 の中心を O_1 とおき，中心 O_1 から辺 AB に下した垂線の足を F とおく。また，円 C と円 C_1 との接点を H とおくと，

$AH = \underbrace{AO}_{2\sqrt{3}} - \underbrace{r}_{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ となる。また，



$O_1H = O_1F = r_1$ (円 C_1 の半径) より，

$AO_1 = \underbrace{AH}_{\sqrt{3}} - \underbrace{O_1H}_{r_1} = \sqrt{3} - r_1$



ここで，直角三角形 AO_1F に着目すると，$\angle O_1AF = 30°$ より，辺の比が

$\underbrace{AO_1}_{\sqrt{3}-r_1} : \underbrace{O_1F}_{r_1} = 2 : 1$ となるので，

$(\sqrt{3} - r_1) : r_1 = 2 : 1$ より，

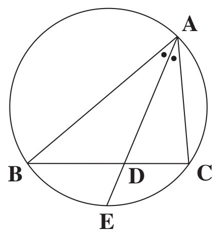
$2r_1 = 1 \cdot (\sqrt{3} - r_1)$，$3r_1 = \sqrt{3}$ $\therefore r_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。………………(答)

(3) 円 C と円 C_1 の半径がそれぞれ，$r = \sqrt{3}$，$r_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ より，
円 C と円 C_1 の面積比は，

$r^2 : {r_1}^2 = (\sqrt{3})^2 : \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 3 : \dfrac{3}{9} = 1 : \dfrac{1}{9} = 9 : 1$ である。………(答)

頻出問題にトライ・25 難易度 ★★★ CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

$AB = 6$，$BC = 5$，$CA = 4$ の $\triangle ABC$ とその外接円がある。$\angle A$ の 2 等分線が，辺 BC と交わる点を D，外接円と交わる点を E とおく。
このとき，線分 AD と DE の長さを求めよ。



解答は P260