補充問題　3

難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

(1) すべての実数 t に対し，$1+t \leqq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ の値を求めよ。

(3) 次の不等式を示せ。

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}dx \leqq 2-\sqrt{2}$$

(広島大)

ヒント！ (1) $f(t)=e^t-t-1$ とおいて，この最小値が 0 以上であることを示せばよい。(2) では，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$ として計算しよう。(3) の不等式の証明では，(1) の不等式の t に $\sin x$ や $-\sin x$ を代入して，定積分を行えばいいんだね。よく考えながら，導入に従って解いていこう。

(1) すべての実数 t に対して，

$1+t \leqq e^t \cdots (*)$ が成り立つことを示す。まず，

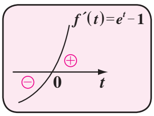
$f(t)=e^t-(t+1)=e^t-t-1 \quad \cdots$①

とおいて，これを t で微分すると，

$f'(t)=e^t-1$

$f'(t)=0$ のとき，

$t=0$ であり，



$f(t)$ の増減表より，$f(t)$ は $t=0$ で最小となる。よって，

増減表

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

最小値 $f(0)=e^0-0-1=1-1=0$

これから，すべての実数 t に対して，

$f(t)=e^t-t-1 \geqq 0$ より，

$(*)$ の不等式が成り立つ。……(終)

(2) 与えられた定積分：

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}dx$ を求める。

分子・分母に $1-\sin x$ をかけた。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\underbrace{(1+\sin x)(1-\sin x)}}dx$$

$$\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}=(1-\sin x)\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{(\tan x)'}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin x)\cdot(\tan x)'dx$$

$$=\Big[(1-\sin x)\cdot\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{(-\cos x)\cdot\tan x}_{-\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=-\sin x}\,dx$$

部分積分法：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\cdot g'dx=[f\cdot g]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'\cdot g\,dx$$

を利用した。

よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 1 \cancel{-0} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2}}-[\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)=2-2\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$=2-\sqrt{2}$ …② となる。……(答)

(3) $1+t \leqq e^t$ …$(*)$ は，すべての実数 t について成り立つ。よって，

(ｉ) $t=\sin x$ を，$(*)$ に代入して，

$$1+\sin x \leqq e^{\sin x} \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

ここで，$1+\sin x>0$，$e^{\sin x}>0$ より，この両辺を $(1+\sin x)e^{\sin x}$ で割ると，

$$\frac{1}{e^{\sin x}} \leqq \frac{1}{1+\sin x}$$

この両辺を，積分区間 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ で積分しても大小関係は変化しない。よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}dx \leqq \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx}_{2-\sqrt{2}\ (②より)}$$

ここで，②より，

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}dx \leqq 2-\sqrt{2}$ ……③ が成り立つ。

(ⅱ) 次に，$t=-\sin x$ を $(*)$ に代入して，

$$1-\sin x \leqq e^{-\sin x} \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

この両辺を，積分区間 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ で積分しても大小関係は変化しない。よって，

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin x)\,dx}_{\boxed{\begin{aligned}[x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} &= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}-(0+1)\\ &=\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}}} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}dx$$

$\therefore\ \frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}dx$ …④

が成り立つ。

以上 (ｉ)(ⅱ) の ③，④より，

不等式：

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}dx \leqq 2-\sqrt{2}$$

は成り立つ。……………………(終)