★★★元気に伸びる数学Ⅱ・B問題集★★★
補充問題（additional question）

補充問題 1	難易度 ★★	連続型確率分布(Ⅱ)

確率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a^2}(x+a) & (-a\leqq x\leqq 0)\\ -\dfrac{1}{6a^2}(x-3a) & (0<x\leqq 3a)\\ 0 & (x<-a,\ 3a<x)\end{cases}$ …① (a：正の定数) に従う確率変数 X がある。

(1) $-\dfrac{a}{2}\leqq X\leqq a$ となる確率 $P\left(-\dfrac{a}{2}\leqq X\leqq a\right)$ を求めよ。

(2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

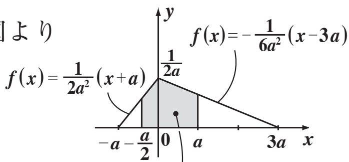
(3) 新たな確率変数 $Y=-\dfrac{X}{a}+1$ について，Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ。

ヒント！ 今回は，任意の正の定数 a について $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$ (全確率) をみたすので，a の値を決定する必要はないんだね。(2) では $\int_{-\frac{a}{2}}^{a}f(x)dx$ を求め，(3) では $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$ を求めよう。(3) の $E(Y)$ はすぐに求められるね。センター試験数学 II·B レベルの問題だ！頑張ろう！

解答＆解説

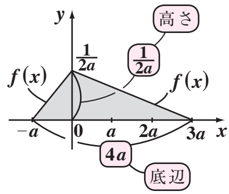
(1) ①の確率密度 $f(x)$ から求める確率は，右図より

$$P\left(-\frac{a}{2}\leqq X\leqq a\right)$$
$$=\int_{-\frac{a}{2}}^{a}f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2a^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{0}(x+a)dx,\ -\frac{1}{6a^2}\int_{0}^{a}(x-3a)dx$$



この面積 $\int_{-\frac{a}{2}}^{a}f(x)dx$ が，確率 $P\left(-\dfrac{a}{2}\leqq X\leqq a\right)$ になる。

ココがポイント



$y=f(x)$ のグラフより，この三角形の面積が，$\dfrac{1}{2}\times 4a\times\dfrac{1}{2a}=1$ (全確率) となるのが分かる。よって，a の値は決定できない。任意の正の定数になるんだね。

$$\therefore P\left(-\frac{a}{2} \leqq X \leqq a\right) = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{2}x^2 + ax\right]_{-\frac{a}{2}}^{0} - \frac{1}{6a^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - 3ax\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2\cancel{a^2}} \times \frac{3}{8}\cancel{a^2} - \frac{1}{6\cancel{a^2}} \times \left(-\frac{5}{2}\cancel{a^2}\right)$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{5}{12} = \frac{9+20}{48} = \frac{29}{48} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

$\Leftarrow \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 + ax\right]_{-\frac{a}{2}}^{0}$

$= 0 - \left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)\right\}$

$= -\frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{8}a^2$

$\cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - 3ax\right]_0^a$

$= \frac{1}{2}a^2 - 3a^2 = -\frac{5}{2}a^2$

(2) 次に，期待値 $E(X)$ は，

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-a}^{0} x \cdot \underbrace{f(x)}_{\frac{1}{2a^2}(x+a)} dx + \int_0^{3a} x \cdot \underbrace{f(x)}_{-\frac{1}{6a^2}(x-3a)} dx$$

$\underbrace{\int_{-\infty}^{-a} x \cdot f(x)dx}_{0} = \underbrace{\int_{3a}^{\infty} x \cdot f(x)dx}_{0} = 0$ となるので，省略できる。

$\Leftarrow E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$
（期待値の定義式）

$$= \frac{1}{2a^2}\int_{-a}^{0}(x^2 + ax)dx - \frac{1}{6a^2}\int_0^{3a}(x^2 - 3ax)dx$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2\right]_{-a}^{0} - \frac{1}{6a^2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3a}{2}x^2\right]_0^{3a}$$

$$= \frac{1}{2a^2} \times \left(-\frac{1}{6}a^3\right) - \frac{1}{6a^2} \times \left(-\frac{9}{2}a^3\right)$$

$$= -\frac{1}{12}a + \frac{3}{4}a = \frac{9-1}{12}a = \frac{2}{3}a \cdots ① \text{となる。}$$

$\cdots\cdots(\text{答})$

$\Leftarrow \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2\right]_{-a}^{0}$

$= 0 - \left\{\frac{1}{3}(-a)^3 + \frac{a}{2}\cdot(-a)^2\right\}$

$= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^3 = -\frac{1}{6}a^3$

$\cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3a}{2}x^2\right]_0^{3a}$

$= \frac{1}{3}\cdot(3a)^3 - \frac{3a}{2}\cdot(3a)^2$

$= 9a^3 - \frac{27}{2}a^3 = -\frac{9}{2}a^3$

(3) 新たな変数 $Y = -\frac{1}{a}X + 1$ の期待値 $E(Y)$ は，

①より，

$$E(Y) = E\left(-\frac{1}{a}X + 1\right) = -\frac{1}{a}\underbrace{E(X)}_{\frac{2}{3}a\ (①\text{より})} + 1$$

$$= -\frac{1}{\cancel{a}} \times \frac{2}{3}\cancel{a} + 1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ となる。}$$

$\cdots\cdots(\text{答})$

$\Leftarrow Y = aX + b$ （a, b：定数）
のとき，Y の期待値 $E(Y)$
は $E(Y) = E(aX + b)$
$= aE(X) + b$ となる。