$$S=\underbrace{\frac{|2|}{6}}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\cancel{m+2}+\sqrt{m^2+4m+6}}{2}-\frac{\cancel{m+2}-\sqrt{m^2+4m+6}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{m^2+4m+6}}{2}+\frac{\sqrt{m^2+4m+6}}{2}}_{\sqrt{m^2+4m+6}}\right)^3$$

$\frac{\sqrt{A}}{2}+\frac{\sqrt{A}}{2}=\sqrt{A}$ だからね。

$$=\frac{1}{3}\left(\underbrace{\sqrt{m^2+4m+6}}_{(m^2+4m+6)^{\frac{1}{2}}}\right)^3$$

$\therefore\ S=\frac{1}{3}(m^2+4m+6)^{\frac{3}{2}}$ となって，答えが求まる。

$A^{\frac{3}{2}}=A^1\cdot A^{\frac{1}{2}}=A\sqrt{A}$ より，この面積 S は，
$S=\frac{1}{3}(m^2+4m+6)\sqrt{m^2+4m+6}$ と表しても，もちろんいいよ。

どう？これで，面積公式の使い方にもずい分慣れただろう？

この放物線と直線で囲まれた図形の面積公式は，実は，2つの放物線で囲まれた図形の面積を求めるときにも，用いることができる。面積公式の応用として，次の練習問題を解いてみよう。

練習問題 75	面積公式(Ⅱ)	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

2つの放物線 $C_1: y=\frac{1}{2}x^2+1$ …① と，$C_2: y=-x^2+2x+3$ …② がある。
(1) 2つの放物線 C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ。
(2) 2つの放物線 C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(1) は，①と②から y を消去して x の2次方程式にもち込んで，交点の x 座標を求めればいい。(2) では，2つの放物線 C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は，放物線と x 軸 (直線) とで囲まれた図形の面積として，面積公式を使って計算できる。

(1) 放物線 C_1：$y=f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+1$ ……………………①

放物線 C_2：$y=g(x)=-x^2+2x+3$

$=-(x^2-2x+1)+4$

$=-(x-1)^2+4$ ……………②　とおく。

①と②より，y を消去して，

$\dfrac{1}{2}x^2+1=-x^2+2x+3$　　両辺に 2 をかけて，

$x^2+2=-2x^2+4x+6$　　　$3x^2-4x-4=0$

3 ╳ 2
1 ╳ −2

$(3x+2)(x-2)=0$

よって，2 つの放物線 C_1 と C_2 の交点の x 座標は，

$x=-\dfrac{2}{3}$ と 2 となることが分かるんだね。

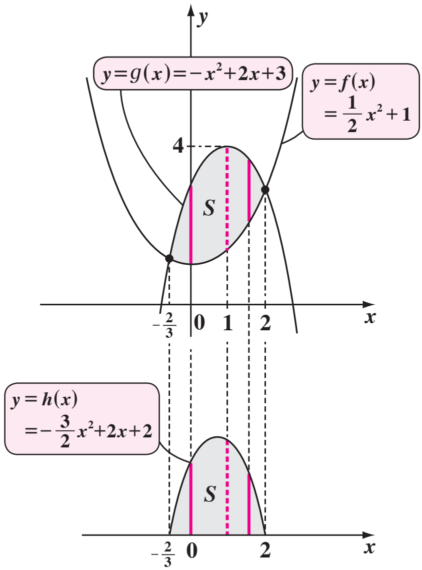
(2) 右図に示すように，2 つの放物線 C_1 と C_2 とで囲まれる図形の面積を S とおくと，$-\dfrac{2}{3}\leqq x\leqq 2$ の範囲で，

$\underbrace{g(x)}_{\text{上側}}\geqq\underbrace{f(x)}_{\text{下側}}$ なので，

$S=\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}}^{2}\underbrace{\{g(x)-f(x)\}}_{h(x)\text{とおく}}dx$ ……③

となるのはいいね。

ここで，$h(x)=\underbrace{g(x)}_{-x^2+2x+3}-\underbrace{f(x)}_{\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)}$ とおくと，



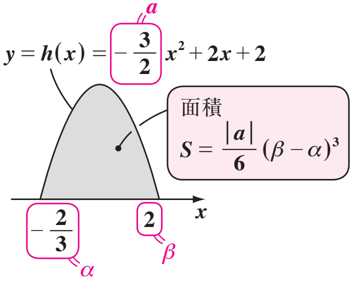
$h(x)=-x^2+2x+3-\left(\dfrac{1}{2}x^2+1\right)=-\dfrac{3}{2}x^2+2x+2$　となる。

よって，求める面積 S は，

$S=\int_{-\frac{2}{3}}^{2} h(x)dx$ となり，これは，

右図に示すように，放物線

$y=h(x)=\underbrace{-\frac{3}{2}}_{a}x^2+2x+2$ と x 軸



(直線)とで囲まれる図形の面積と

一致するんだね。このとき，$a=-\frac{3}{2}$，$\alpha=-\frac{2}{3}$，$\beta=2$ より，

S は放物線と直線とで囲まれる図形の面積公式を利用して，

$$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{6}\left\{2-\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}^3=\frac{\frac{3}{2}}{6}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3=\frac{1}{\cancel{4}}\times\frac{\overset{2}{\cancel{8}}\times64}{3^3}$$

$\therefore S=\frac{128}{27}$ となって，答えだ！どう？これも面白かったでしょう？

それでは，重要な面積公式をもう 1 つ紹介しておこう。今度は，放物線と 2 本の接線とで囲まれる図形の面積は次の公式でアッという間に求められるんだね。これも重要公式なので，シッカリ頭に入れよう！

面積公式(Ⅱ)

$y=ax^2+bx+c$ とその 2 つの接線①，②とで囲まれる図形の面積 S は，放物線と 2 接線の接点の x 座標 α，$\beta(\alpha<\beta)$ と，x^2 の係数 a の 3 つだけで，次のように簡単に計算できる。

$$\text{面積 } S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$