演習問題 63	難易度 ★★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

x, y を自然数, p を 3 以上の素数とするとき, 次の各問いに答えよ。

(1) $x^2 - y^2 = p$ が成り立つとき, x, y を p で表せ。

(2) $x^3 - y^3 = p$ が成り立つとき, p を 6 で割った余りが 1 となることを証明せよ。

(3) $x^3 - y^3 = p$ が自然数の解の組 (x, y) をもつような p を, 小さい数から順に p_1, p_2, p_3 …… とするとき, p_5 の値を求めよ。　(早稲田大)

ヒント！ (1)は, $A \cdot B = p$(素数)の形にして解けばいいね。(2)も, $A \cdot B = p$(素数)の形から $x = y + 1$ が導けるので, これから, p を y の式で表せば話が見えてくるはずだ。(3)は, (2)が導入となっているので, (2)の結果を使って解けばいいんだね。頑張ろう！

解答＆解説

(1) $x^2 - y^2 = p$ ……① とおく。

$(x, y$: 自然数, p : 3 以上の素数$)$

①を変形して,

$\underbrace{(x+y)}_{\oplus}(x-y) = \underbrace{p}_{\oplus}$ ……①′

$A \cdot B = p$ (素数) 型ができた！

ここで, x, y は自然数, p は 3 以上の素数なので

$x + y > 0$, $p > 0$ となる。よって, $x - y > 0$

さらに, $0 < x - y < x + y$ が成り立つので, ①′ より

$x - y = 1$ ……② かつ, $x + y = p$ ……③ となる。

$\dfrac{③+②}{2}$ より　$x = \dfrac{p+1}{2}$ ……………………(答)

$\dfrac{③-②}{2}$ より　$y = \dfrac{p-1}{2}$ ……………………(答)

(2) $x^3 - y^3 = p$ ……④ とおく。

$(x, y$: 自然数, p : 3 以上の素数$)$

④を変形して,

$(x-y)\underbrace{(x^2 + xy + y^2)}_{\oplus (3\text{以上の数})} = \underbrace{p}_{\oplus}$ ……④′

$A \cdot B = p$ (素数) 型ができた！

ココがポイント

⇐素数は, 2, 3, 5, 7, 11, 13… より, 2 以外の 3 以上の素数はすべて奇数になる。

⇐今回, $x - y$ と $x + y$ が負の場合は考えなくていいので, この 1 組だけだね。

⇐p は素数より, x, y 共に自然数となって, 条件をみたす。

⇐因数分解公式
$a^3 - b^3$
$= (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

⇐$x^2 + xy + y^2$
$\geqq 1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 = 3$