演習問題 118 ● エルミート行列の対角化(Ⅰ)●

エルミート行列 $A_H = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -2i & -2 \end{bmatrix}$ を，ユニタリ行列 U_U を用いて，$U_U^{-1} A_H U_U$ として対角化せよ。

ヒント！ 固有方程式を解いて，2 つの固有値 λ_1，λ_2 を求め，これから 2 つの正規直交ベクトル u_1，u_2 を求めて，そして，ユリタリ行列 U_U を作ればいいんだね。

解答＆解説

$\underline{Tx = 0}$ ……① ただし，$T = A_H - \lambda E = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2i \\ -2i & -2-\lambda \end{bmatrix}$ とおく。

$(A_H - \lambda E)\,x = 0\,(x \neq 0)$ のこと

固有方程式 $T = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2i \\ -2i & -2-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{(1-\lambda)(-2-\lambda)}_{(\lambda-1)(\lambda+2)=\lambda^2+\lambda-2} - \underbrace{2i\cdot(-2i)}_{4} = 0$

を解いて，$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ $(\lambda-2)(\lambda+3) = 0$

$\therefore \lambda = \underbrace{2}_{\lambda_1},\ \underbrace{-3}_{\lambda_2 とおく}$

(ⅰ) $\lambda_1 = 2$ のとき，①を $T_1 x_1 = 0$ とおき，$x_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} -1 & 2i \\ -2i & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2i \\ -2i & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Big\}\, r = 1$$

$-\alpha_1 + 2i \cdot \alpha_2 = 0$

ここで，$\alpha_2 = k_1$ とおくと，

$\alpha_1 = 2k_1 i$

$\therefore x_1 = k_1 \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \end{bmatrix}$ $(k_1 \neq 0)$

ここで，$k_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ とおくと，x_1 は正規化される。これを u_1 とおくと，

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_1' = \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと，

$\|x_1'\|^2 = {}^t x_1' \overline{x}_1'$

$= [2i \quad 1]\begin{bmatrix} -2i \\ 1 \end{bmatrix}$

$= 2i \cdot (-2i) + 1 \cdot 1 = 5$

$\therefore \|x_1'\| = \sqrt{5}$ より，

$k_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ とおけばいい。