補充問題 1 漸化式と数学的帰納法 CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式で定義されている。

$$a_1 = \frac{1}{2},\quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2^{n+1}a_n + 4} \quad \cdots\cdots① \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $a_n > 0$ ……(＊)　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを，数学的帰納法により証明せよ。

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ ……②　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおいて，b_n の漸化式を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求め，次に数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

ヒント！ (1) 簡単な証明だね。まず，(ⅰ) $a_1 > 0$ を示し，(ⅱ) $a_k > 0$ と仮定して $a_{k+1} > 0$ を示せばいい。(2)(＊) より，$a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ なので，①の両辺の逆数をとって，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$，$b_{n+1} = \dfrac{1}{a_{n+1}}$ とおいて，b_n の漸化式を作るんだね。(3) b_n の漸化式を，等比関数列型漸化式：$F(n+1) = r \cdot F(n)$ の形にもち込んで，一般項 b_n を求めよう。後はこの逆数が，一般項 a_n になるんだね。頑張ろう！

解答＆解説

(1) $a_n > 0$ ……(＊) $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを，数学的帰納法により証明する。

(ⅰ) $n = 1$ のとき，$a_1 = \dfrac{1}{2} > 0$ となって，(＊) をみたす。

(ⅱ) $n = k$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき，$a_k > 0$ と仮定すると，

$2^{k+1} > 0$ より，①の n を k に置き換えると，

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2^{k+1}a_k + 4} > 0 \quad \therefore a_{k+1} > 0 \text{ をみたす。}$$

以上 (ⅰ)，(ⅱ) より，数学的帰納法により，(＊) は成り立つ。……(終)

問題 **147(3)(P206)** の b_n についても，$b_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を同様に証明できる。自分でやってみてごらん！

(2) $a_n > 0$ ……(＊) $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より，①の両辺の逆数をとって，

$$\underbrace{\frac{1}{a_{n+1}}}_{b_{n+1}} = \frac{2^{n+1}\cdot a_n + 4}{a_n} = 2^{n+1} + 4\cdot\underbrace{\frac{1}{a_n}}_{b_n} \quad \cdots\cdots②$$

$a_n > 0$，$a_{n+1} > 0$ より，分母が 0 になることはないからね。

ここで，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_{n+1} = \dfrac{1}{a_{n+1}}$ より，

②は，$b_{n+1} = 4b_n + 2^{n+1}$ ……③ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ となる。

また，$b_1 = \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ より，$\{b_n\}$ の漸化式は，$b_{n+1} = 4b_n + 2^{n+1}$ ……③

$b_1 = 2$，$b_{n+1} = 4b_n + 2 \cdot 2^n$ ……③ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ となる。………(答)

②を解くためには，$b_{n+1} + \alpha \cdot 2^{n+1} = 4(b_n + \alpha \cdot 2^n)$ $[F(n+1) = 4 \cdot F(n)]$ をみたす定数 α の値を求めればいいんだね。

(3) ③を変形して，$b_{n+1} + \alpha \cdot 2^{n+1} = 4(b_n + \alpha \cdot 2^n)$ …④ となるものとする。

④より，$b_{n+1} = 4b_n + \underbrace{4\alpha \cdot 2^n - \alpha \cdot 2^{n+1}}_{(4\alpha - 2\alpha)2^n = 2\alpha \cdot 2^n} = 4b_n + \underbrace{2\alpha}_{2\,(③と比較して)} \cdot 2^n$ ……④´ となる。

③と④´の右辺の 2^n の係数を比較して，$2\alpha = 2$ $\therefore \alpha = 1$ ……⑤

⑤を④に代入して，

$b_{n+1} + 1 \cdot 2^{n+1} = 4(b_n + 1 \cdot 2^n)$

$b_{n+1} + 2^{n+1} = 4(b_n + 2^n)$ より，

$[\ F(n+1) = 4\ F(n)\ ]$

アッ！という間

$b_n + 2^n = (b_1 + 2^1) \cdot 4^{n-1}$

$[\ F(n) = F(1) \cdot 4^{n-1}\ ]$

ここで，$b_1 = 2$ より，$b_n + 2^n = \underbrace{4 \cdot 4^{n-1}}_{4^n}$

∴求める数列 $\{b_n\}$ の一般項は，

$b_n = 4^n - 2^n$ ……⑥ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ である。…………………………(答)

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ より，$a_n = \dfrac{1}{b_n}$ である。よって⑥から，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は，

$a_n = \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{4^n - 2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ である。………………………(答)