三角形の外心

演習問題 74	難易度 ★★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

三角形 **OAB** において，**OA** $= 4$，**OB** $= 5$，**AB** $= 6$ である。また，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) 三角形 **OAB** の外心を **Q** とおくとき，$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

（早稲田大＊）

ヒント！ **(1)** $AB = |\vec{b}-\vec{a}| = 6$ から，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めればいい。**(2)** では，まず，$\overrightarrow{OQ} = s\vec{a}+t\vec{b}$ とおいて，s と t の値を求めよう。その際，外心 **Q** が，△**OAB** の各辺の垂直二等分線の交点であることを利用するといいよ。

解答＆解説

(1) △**OAB** について，**OA** $= 4$，**OB** $= 5$，**AB** $= 6$ より，

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくと，

$OA = |\vec{a}| = 4$ ……①，$OB = |\vec{b}| = 5$ ……②

また，$AB = |\overrightarrow{AB}| = \boxed{|\vec{b}-\vec{a}| = 6}$ ……③ より，

$|\vec{b}-\vec{a}| = 6$ ……③ の両辺を 2 乗して，

$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = 36$

$$\underbrace{|\vec{b}|^2}_{5^2\,(②より)} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \underbrace{|\vec{a}|^2}_{4^2\,(①より)} = 36$$

$25 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 16 = 36 \qquad 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 5$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{5}{2}$ ……④ である。………………………（答）

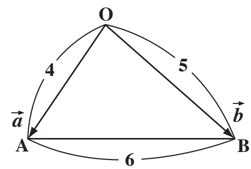
(2) △**OAB** の外心 **Q** について，

$\overrightarrow{OQ} = s\vec{a} + t\vec{b}$ ……⑤ とおく。

また，右図に示すように，辺 **OA** の中点を **M**，辺 **OB** の中点を **N** とおくと，外心 **Q** は，各辺の垂直二等分線の交点であるので，

(i) $\overrightarrow{MQ} \perp \vec{a}$ かつ (ii) $\overrightarrow{NQ} \perp \vec{b}$ となる。

ココがポイント



⇦ $(b-a)^2 = 36$
$b^2 - 2ab + a^2 = 36$
と同様に，
$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = 36$ の左辺は
展開できる。