ここで，x, y は自然数，p は3以上の素数より，同様に

$0 < x-y < x^2+xy+y^2$ となるので，④′より

$x-y=1$ ……⑤　$x^2+xy+y^2=p$ ……⑥ となる。

⇦今回も，$(x-y,\ x^2+xy+y^2)=(1,\ p)$ の1組だけだ。

⑤より，$x=y+1$ ……⑤′

⑤′を⑥に代入して，まとめると，

$p=3\underbrace{y\cdot(y+1)}_{2の倍数}+1$ ……⑦　となる。

⇦$p=(y+1)^2+y(y+1)+y^2$
$=3y^2+3y+1$
$=3y(y+1)+1$

ここで，連続する2つの整数の積 $y\cdot(y+1)$ は2の倍数より，$3\cdot y(y+1)$ は6の倍数である。

よって，⑦より，素数 p を6で割った余りは1となる。 ……………………………………………(答)

⇦y または $y+1$ のいずれかが，必ず偶数となるから，$y(y+1)$ は必ず2の倍数になる。

(3) $x^3-y^3=p$ ……④ をみたす素数 p は，⑦式で計算できる。

よって，$y=1, 2, 3, \cdots$ を順次⑦に代入して，小さい順に素数 p を p_1，p_2，p_3 …と求めると，

(i) $y=1$ のとき，$p=3\cdot1\cdot(1+1)+1=7$ (素数)

$\therefore p_1=7$

(ii) $y=2$ のとき，$p=3\cdot2\cdot(2+1)+1=19$ (素数)

$\therefore p_2=19$

(iii) $y=3$ のとき，$p=3\cdot3\cdot(3+1)+1=37$ (素数)

$\therefore p_3=37$

(iv) $y=4$ のとき，$p=3\cdot4\cdot(4+1)+1=61$ (素数)

$\therefore p_4=61$

(v) $y=5$ のとき，$p=3\cdot5\cdot(5+1)+1=91$

91は素数ではない。よって，不適

⇦$91=7\times13$ と素因数分解できるので，91は素数ではない。よって，$p_5 \neq 91$ だね。

(vi) $y=6$ のとき，$p=3\cdot6\cdot(6+1)+1=127$ (素数)

$\therefore p_5=127$

∴求める p_5 の値は，$p_5=127$ である。………(答)