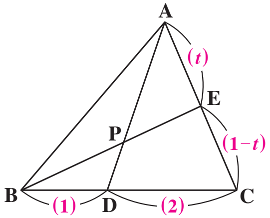
初めからトライ！問題 133　三角形の面積比　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

右図に示すように，$\triangle ABC$ とその内部の点 P がある。直線 AP と辺 BC との交点を D とおき，直線 BP と辺 AC との交点を E とおく。また，$BD : DC = 1 : 2$，$AE : EC = t : 1-t$（ただし，t は，$0 < t < 1$ の範囲の定数）である。



(1) $\dfrac{PD}{AP}$ を t で表せ。

(2) $\dfrac{\triangle ABP}{\triangle ABC} = \dfrac{3}{11}$ のとき，t の値を求めよ。

ヒント！ (1) $AP : PD$ を $m : n$ とおいて，メネラウスの定理を利用すればいい。(2) 三角形の面積比の問題で，$\triangle ABP = \dfrac{m}{m+n}\triangle ABD = \dfrac{m}{m+n} \times \dfrac{1}{3}\triangle ABC$ となることを導いてみよう。

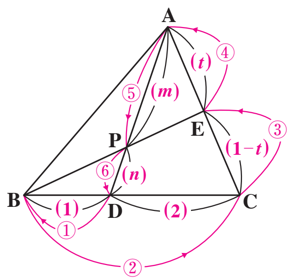
解答＆解説

(1) $AP : PD = m : n$ とおく。また，

$BD : DC = 1 : 2$，$AE : EC = t : 1-t$

より，$\triangle ABC$ にメネラウスの定理を用いると，

$\dfrac{3}{1} \times \dfrac{t}{1-t} \times \dfrac{n}{m} = 1$ ……①　$\dfrac{②}{①} \times \dfrac{④}{③} \times \dfrac{⑥}{⑤} = 1$



となるので，辺の比 $\dfrac{PD}{AP}$ は，

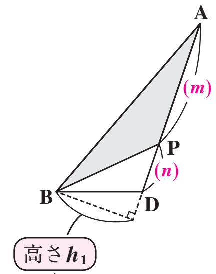
$\dfrac{PD}{AP} = \dfrac{n}{m} = \dfrac{1-t}{3t}$ ……② となる。 ……………………………(答)

(2) $\triangle ABP$ と $\triangle ABC$ の面積比が $\dfrac{\triangle ABP}{\triangle ABC} = \dfrac{3}{11}$ ……③ のとき，t の値を求める。

(i) $\triangle ABP$ と $\triangle ABD$ の面積について，右図のように，高さは h_1 で共通なので，これらの面積は底辺の長さの比に比例する。

よって，

$\triangle ABP = \dfrac{m}{m+n}\triangle ABD$ ……④ となる。

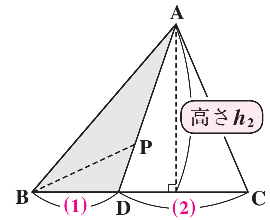


$$\begin{cases} \triangle ABP = \dfrac{1}{2} \cdot AP \cdot h_1 \text{ ……㋐} \\ \triangle ABD = \dfrac{1}{2} \cdot AD \cdot h_1 \text{ ……㋑} \end{cases}$$ より，㋐÷㋑は $\dfrac{\triangle ABP}{\triangle ABD} = \dfrac{\dfrac{\cancel{h_1}}{\cancel{2}} \cdot AP}{\dfrac{\cancel{h_1}}{\cancel{2}} \cdot AD} = \dfrac{m}{m+n}$ となる。

(ii) $\triangle ABD$ と $\triangle ABC$ の面積について，右図のように，高さは h_2 で共通なので，これらの面積は底辺の長さの比に比例する。

よって，

$\triangle ABD = \dfrac{1}{3}\triangle ABC$ ……⑤ となる。



$$\begin{cases} \triangle ABD = \dfrac{1}{2} \cdot BD \cdot h_2 \text{ ……㋒} \\ \triangle ABC = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot h_2 \text{ ……㋓} \end{cases}$$ より，㋒÷㋓は $\dfrac{\triangle ABD}{\triangle ABC} = \dfrac{\dfrac{\cancel{h_2}}{\cancel{2}} \cdot BD}{\dfrac{\cancel{h_2}}{\cancel{2}} \cdot BC} = \dfrac{1}{3}$ となる。

以上 (i)(ii) より，⑤を④に代入して，

$\triangle ABP = \dfrac{m}{m+n}\triangle ABD = \dfrac{m}{m+n} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \triangle ABC$　となる。よって，

$\dfrac{\triangle ABP}{\triangle ABC} = \boxed{\dfrac{m}{3(m+n)} = \dfrac{3}{11}}$（③より）　これから，$11m = 9m + 9n$

$2m = 9n$ より，$\dfrac{n}{m} = \dfrac{2}{9}$ ……⑥ となる。⑥に②を代入して，

$\dfrac{1-t}{3t} = \dfrac{2}{9}$　　$\dfrac{1-t}{t} = \dfrac{2}{3}$　　$3 - 3t = 2t$　　$5t = 3$　　$\therefore t = \dfrac{3}{5}$ ………(答)