初めからトライ！問題 149　対称形の連立漸化式　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

次の連立漸化式を解け。

(1) $a_1 = 5,\ b_1 = 3$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 3b_n & \cdots\cdots\cdots ① \\ b_{n+1} = 3a_n + 5b_n & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2) $a_1 = 2,\ b_1 = -\sqrt{3}$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - \sqrt{3}b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ b_{n+1} = -\sqrt{3}a_n + 2b_n & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

ヒント！ 2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の連立の漸化式が，

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots\cdots ㋐ \\ b_{n+1} = qa_n + pb_n & \cdots\cdots ㋑ \end{cases}$$

のように，係数 p と q が対角線上に等しいとき，これを，対称形の連立漸化式というんだね。この場合，㋐＋㋑と㋐－㋑から容易に，等比関数列型漸化式 $F(n+1) = rF(n)$ を導くことができるので，後は「アッという間」に解ける。この解法パターンも頭に入れておこう！

解答＆解説

(1) $a_1 = 5,\ b_1 = 3$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 3b_n & \cdots\cdots\cdots ① \\ b_{n+1} = 3a_n + 5b_n & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

対称形の連立漸化式なので，①＋②と①－②を求めよう！

①＋②より，$a_{n+1} + b_{n+1} = 8(a_n + b_n)$ ………①′

$[\ F(n+1) = 8 \cdot F(n)\ ]$

①－②より，$a_{n+1} - b_{n+1} = 2(a_n - b_n)$ ………②′

$[\ G(n+1) = 2 \cdot G(n)\ ]$

アッ！

①′，②′より，$a_n + b_n = (\overset{5}{a_1} + \overset{3}{b_1}) \cdot 8^{n-1}$

$[\ F(n) = F(1) \cdot 8^{n-1}\ ]$

$a_n - b_n = (\overset{5}{a_1} - \overset{3}{b_1}) \cdot 2^{n-1}$

$[\ G(n) = G(1) \cdot 2^{n-1}\ ]$

以上より，$\begin{cases} a_n + b_n = 8^n & \cdots\cdots\cdots ①'' \\ a_n - b_n = 2^n & \cdots\cdots\cdots ②'' \end{cases}$

よって，求める数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項は，

$\dfrac{①''+②''}{2}$ より，$a_n = \dfrac{1}{2}(8^n + 2^n)$

$\dfrac{①''-②''}{2}$ より，$b_n = \dfrac{1}{2}(8^n - 2^n)$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　である。………(答)

(2) $a_1 = 2,\ b_1 = -\sqrt{3}$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2 \cdot a_n - \sqrt{3} \cdot b_n & \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ b_{n+1} = -\sqrt{3} \cdot a_n + 2 \cdot b_n & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

これも，対称形の連立漸化式なので，③＋④と③－④を求める！

③＋④より，$a_{n+1} + b_{n+1} = (2 - \sqrt{3})(a_n + b_n)$ ………③′

$[\ F(n+1) = (2 - \sqrt{3}) \cdot F(n)\ ]$

③－④より，$a_{n+1} - b_{n+1} = (2 + \sqrt{3})(a_n - b_n)$ ………④′

$[\ G(n+1) = (2 + \sqrt{3}) \cdot G(n)\ ]$

アッ！

③′，④′より，$a_n + b_n = (\overset{2}{a_1} + \overset{-\sqrt{3}}{b_1}) \cdot (2 - \sqrt{3})^{n-1}$

$[\ F(n) = F(1) \cdot (2 - \sqrt{3})^{n-1}\ ]$

$a_n - b_n = (\overset{2}{a_1} - \overset{(-\sqrt{3})}{b_1}) \cdot (2 + \sqrt{3})^{n-1}$

$[\ G(n) = G(1) \cdot (2 + \sqrt{3})^{n-1}\ ]$

以上より，$\begin{cases} a_n + b_n = (2 - \sqrt{3})^n & \cdots\cdots\cdots ③'' \\ a_n - b_n = (2 + \sqrt{3})^n & \cdots\cdots\cdots ④'' \end{cases}$

よって，求める数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項は，

$\dfrac{③''+④''}{2}$ より，$a_n = \dfrac{1}{2}\{(2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n\}$

$\dfrac{③''-④''}{2}$ より，$b_n = \dfrac{1}{2}\{(2 - \sqrt{3})^n - (2 + \sqrt{3})^n\}$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

である。…………………………………………………(答)