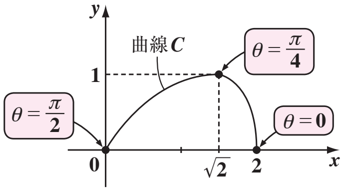
初めからトライ！問題 118 媒介変数表示の曲線と面積 CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

曲線 C $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases}$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。



ヒント！ これも媒介変数表示された曲線 C と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求める問題なので，公式：$S = \displaystyle\int_\alpha^\beta y \cdot \frac{dx}{d\theta}\,d\theta$ を使って求めよう！

解答＆解説

曲線 C $\begin{cases} x = 2\cos\theta \quad \cdots\cdots ① \\ y = \sin 2\theta \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

①，②より，

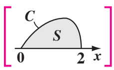
$\theta : 0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{4} \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$

$(x, y) : \underset{(2\cos 0,\ \sin 0)}{(2, 0)} \longrightarrow \underset{\left(2\cos\frac{\pi}{4},\ \sin\frac{\pi}{2}\right)}{(\sqrt{2}, 1)} \longrightarrow \underset{\left(2\cos\frac{\pi}{2},\ \sin\pi\right)}{(0, 0)}$

これら 3 点を滑らかに結べば，曲線 C のグラフの概形が上図のようになることが分かるんだね。

と x 軸とで囲まれた図形の面積 S は，曲線 C の y 座標が $y \geqq 0$ であることから，

$$S = \int_0^2 y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y \cdot \frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$



$x : 0 \to 2$ のとき，$\theta : \dfrac{\pi}{2} \to 0$ より

ここで，①，②より，

$y = \underbrace{\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta}_{2\text{倍角の公式}}$，$\dfrac{dx}{d\theta} = (2\cos\theta)' = -2\sin\theta$　よって，

$-\displaystyle\int_a^b f(\theta)\,d\theta < \int_b^a f(\theta)\,d\theta$

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\sin\theta\cos\theta \cdot (-2\sin\theta)\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\left[\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\left\{\underbrace{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^3}_{1} - \underbrace{\cancel{(\sin 0)^3}}_{0}\right\}$$

・$(\sin^3\theta)' = 3\sin^2\theta \cdot \cos\theta$ より，（合成関数の微分）

・$\displaystyle\int \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$ となる。

$\therefore\ S = \dfrac{4}{3}(1^3 - 0) = \dfrac{4}{3}$ ……………………………………（答）