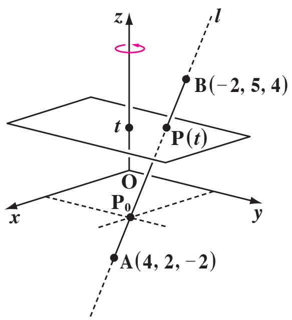
実力アップ問題 129　難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

空間における点 $\mathbf{A}(4,\ 2,\ -2)$，点 $\mathbf{B}(-2,\ 5,\ 4)$ を通る直線 l を，z 軸の周りに回転してできる曲面を S とする。



(1) 直線 l の方向ベクトル $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ を成分表示せよ。

(2) xy 平面と直線 l の交点 $\mathbf{P}_0$ の x 座標，y 座標を求めよ。

(3) 平面 $z=t\ (-2 \leqq t \leqq 4)$ と直線 l の交点 $\mathbf{P}(t)$ の x 座標，y 座標を t で表せ。

(4) 平面 $z=t$ と曲面 S の交わりは円となる。この円の半径を求めよ。

(5) 平面 $z=4$，平面 $z=-2$，曲面 S で囲まれた立体の体積を求めよ。

(職能開発大＊)

ヒント！ z 軸とねじれの位置にある直線 $\mathbf{AB}$ を，z 軸のまわりに回転してできる曲面 S と平面 $z=4,\ z=-2$ とで囲まれる立体の体積を求める問題だね。この手の問題では，曲面 S の形状について考える必要はない。曲面 S を z 軸に垂直な平面 $z=t\ (-2 \leqq t \leqq 4)$ で切った切り口は円になるので，この半径 r を求め，断面積 $A(t)=\pi r^2$ を，区間 $[-2,\ 4]$ において t で積分することにより，この立体の体積を求めることができるんだね。空間座標と体積計算の典型的な融合問題だ。

(1) 2点 $\mathbf{A}(4,\ 2,\ -2)$，$\mathbf{B}(-2,\ 5,\ 4)$ のとき，

$\overrightarrow{\mathbf{OA}}=(4,\ 2,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathbf{OB}}=(-2,\ 5,\ 4)$

よって，$\underline{\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{OB}}-\overrightarrow{\mathbf{OA}}}$ より，

まわり道の原理

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(-2,\ 5,\ 4)-(4,\ 2,\ -2)$

$=(-6,\ 3,\ 6)$ となる。………(答)

(2) $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(-6,\ 3,\ 6)\,/\!/\ \vec{d}=(-2,\ 1,\ 2)$

より，直線 l は，点 $\mathbf{A}(4,\ 2,\ -2)$ を通り方向ベクトル $\vec{d}=(-2,\ 1,\ 2)$ の直線であるので，l の方程式は，

$$\frac{x-4}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{2}\ \cdots\cdots ① \text{となる。}$$

基本事項

点 $\mathbf{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d}=(l,\ m,\ n)$ の直線の方程式は，

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \quad \text{である。}$$

よって，直線 l と xy 平面 $(z=0)$ との交点 $\mathbf{P}_0$ の $x,\ y$ 座標は，$z=0$ を①に代入して，

$$\frac{x-4}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{0+2}{2}=1 \text{ より，}$$

$$\begin{cases} x=-2+4=2 \leftarrow \boxed{\dfrac{x-4}{-2}=1 \text{ より，}} \\ y=1+2=3 \leftarrow \boxed{\dfrac{y-2}{1}=1 \text{ より，}} \end{cases}$$

となる。………(答)

(3) 次に，直線 l と平面 $z=t\ (-2 \leqq t \leqq 4)$ との交点 $\mathbf{P}(t)$ の座標は，$z=t$ を①に代入して，

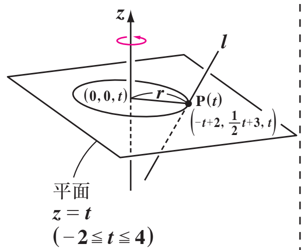
$$\frac{x-4}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{t+2}{2} \text{ より，}$$

$$\begin{cases} x=-(t+2)+4=-t+2 \leftarrow \boxed{\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{t+2}{2}} \\ y=\dfrac{1}{2}(t+2)+2=\dfrac{1}{2}t+3 \leftarrow \boxed{\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{t+2}{2}} \end{cases}$$

となる。よって，点 $\mathbf{P}(t)$ の $x,\ y$ 座標は，

$$x=-t+2,\ y=\frac{1}{2}t+3 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

(4) 直線 l を z 軸のまわりに回転してできる曲面が曲面 S であるので，



これを平面 $z=t\ (-2 \leqq t \leqq 4)$ で切ってできる切り口は，上の図に示すように，点 $\mathbf{P}(t)\left(-t+2,\ \dfrac{1}{2}t+3,\ t\right)$ を z 軸のまわりに回転した円になる。

よって，この円の半径を r とおくと，r は，2点 $(0,\ 0,\ t)$ と $\mathbf{P}(t)\left(-t+2,\ \dfrac{1}{2}t+3,\ t\right)$ を結ぶ線分の長さに等しい。よって，

$$r=\sqrt{(-t+2-0)^2+\left(\frac{1}{2}t+3-0\right)^2+\cancel{(t-t)^2}}$$

$$=\sqrt{t^2-4t+4+\frac{1}{4}t^2+3t+9}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{4}t^2-t+13}\ \cdots② \text{ となる。}\cdots(\text{答})$$

(5) 平面 $z=4$，$z=-2$ と曲面 S とで囲まれた立体を，平面 $z=t\ (-2 \leqq t \leqq 4)$ で切ってできる断面の円の面積を $A(t)$ とおくと，②より，

$$A(t)=\pi r^2=\pi\left(\frac{5}{4}t^2-t+13\right)\ \cdots\cdots ③$$

となる。

よって，この立体の体積を V とおくと，V は③を積分区間 $[-2,\ 4]$ で t について積分することにより求められる。

よって，

$$V=\int_{-2}^{4} A(t)\,dt$$

$$=\pi\int_{-2}^{4}\left(\frac{5}{4}t^2-t+13\right)dt$$

$$=\pi\left[\frac{5}{12}t^3-\frac{1}{2}t^2+13t\right]_{-2}^{4}$$

$$=\pi\left\{\frac{5}{12}\cdot 4^3-\frac{1}{2}\cdot 4^2+13\cdot 4 -\left(-\frac{5}{12}\cdot 2^3-\frac{1}{2}\cdot 2^2-13\cdot 2\right)\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{80}{3}-8+52+\frac{10}{3}+2+26\right)$$

$$=\pi(30-8+52+28)$$

$$=102\pi \text{ である。} \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$