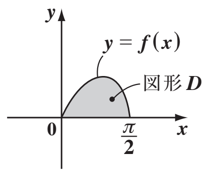
バウムクーヘン型積分(Ⅱ)

演習問題 86 難易度 ★★★ CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

右図に示すように，曲線 $y=f(x)=x\cdot\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれる図形を D とおく。



(1) 図形 D を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_x を求めよ。

(2) 図形 D を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_y を求めよ。

ヒント！ (1) D の x 軸のまわりの回転体の体積 V_x は $V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\}^2dx$ で求め，(2) D の y 軸のまわりの回転体の体積 V_y は，バウムクーヘン型積分を利用して，$V_y=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot f(x)dx$ から求めればいいんだね。シッカリ計算しよう。

解答＆解説

ココがポイント

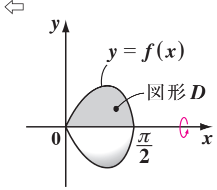
曲線 $y=f(x)=x\cdot\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれる図形 D について，

(1) 図形 D を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_x は，

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)\}^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\underbrace{\cos^2x}_{\frac{1}{2}(1+\cos 2x)}dx$$

半角の公式

⇦



$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx}_{㋐}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos 2x\,dx}_{㋑}\right)\ \cdots\cdots①\ となる。$$

ここで，

㋐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^3=\frac{\pi^3}{24}$ ……②

㋑ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx$ ⇦ 部分積分を2回行う。

$$=\frac{1}{2}\cancel{\underbrace{\left[x^2\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\cdot\sin 2x\,dx$$

⇦ $\left[x^2\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\underbrace{\sin\pi}_{0}-0^2\sin 0=0$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$$

$$=-\left\{-\frac{1}{2}\left[x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\cancel{\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx}_{0}}\right\}$$

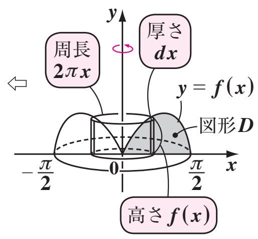
⇦ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(\underbrace{\sin\pi}_{0}-\underbrace{\sin 0}_{0})=0$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\pi}_{-1}=-\frac{\pi}{4}\ \cdots\cdots③$$

以上②，③を①に代入して，

$$V_x=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^3}{24}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{48}(\pi^2-6)\ \cdots\cdots(答)$$

(2) 図形 D を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_y は，バウムクーヘン型積分で求めると， ⇦



微小体積

$dV_y=2\pi x\cdot f(x)dx$

$$V_y=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\underbrace{f(x)}_{x\cdot\cos x}dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\cos x\,dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot(\sin x)'dx \leftarrow \boxed{部分積分を2回行う！}$$

$$=2\pi\left\{\left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\cdot\sin x\,dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{\frac{\pi^2}{4}\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot(-\cos x)'dx\right\}$$

$$=\frac{\pi^3}{2}-4\pi\left\{-\cancel{\underbrace{\left[x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot\cos x\,dx\right\}$$

⇦ $\left[x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}-0\cdot\cos 0=0$

$$=\frac{\pi^3}{2}-4\pi\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{2}-4\pi\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}$$

$$=\frac{\pi^3}{2}-4\pi=\frac{\pi}{2}(\pi^2-8)\ \cdots\cdots(答)$$