次の例題で，放物線上にない点から，放物線に引かれる 2 本の接線の方程式を求める問題にもチャレンジしてみよう。

練習問題 58 接線の応用 CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

放物線 $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$ と点 A$(3,\ -3)$ がある。点 A を通り，放物線 $y=f(x)$ に接する接線の方程式をすべて求めよ。

$x=3$ のとき，$y=f(3)=\frac{9}{2}-6+3=\frac{9-6}{2}=\frac{3}{2}$ より，点 A$(3,\ -3)$ は放物線 $y=f(x)$ 上の点ではない。放物線 $y=f(x)$ 上にない点 A から，この放物線に引く接線の方程式を求める手順は，次の 3 ステップなんだね。

step(ⅰ) 放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$ ……ⓐ を立てる。

step(ⅱ) ⓐは，点 A$(3,\ -3)$ を通るので，ⓐの x，y に $x=3$，$y=-3$ を代入して，t の 2 次方程式ⓑを作る。

step(ⅲ) t の 2 次方程式ⓑを解いて，t の値を求める。そして，この t の値をⓐに代入して，接線の方程式を決定する。

以上の手順に従って，接線の方程式を求めればいいんだね。頑張ろう！

放物線 $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$ ……① に対して，この曲線外の点 A$(3,\ -3)$ から引ける接線の方程式を求める。

①を x で微分して，

$f'(x)=x-2$

よって，①の放物線上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$$y=(t-2)(x-t)+\frac{1}{2}t^2-2t+3 \quad \cdots\cdots② \text{ となる。} \leftarrow \boxed{\text{step(ⅰ)}}$$

$$\left[y=f'(t)\cdot(x-t)+f(t)\right]$$

②は，点 A$(3,\ -3)$ を通るので，$x=3$，$y=-3$ を②に代入して，

$$-3=\underbrace{(t-2)\cdot(3-t)}_{3t-t^2-6+2t=-t^2+5t-6}+\frac{1}{2}t^2-2t+3 \text{ より，}$$

$$-3=-t^2+5t-6+\frac{1}{2}t^2-2t+3$$

$\cancel{-3} = -\frac{1}{2}t^2 + 3t \cancel{-3}$　　$\frac{1}{2}t^2 - 3t = 0$　この両辺に 2 をかけて，

t の 2 次方程式　$t(t-6)=0$ ……③ が導ける。← step(ⅱ)

③を解いて，$t=0$，6

(ⅰ) $t=0$ のとき，これを②に代入して，

$$y=(0-2)(x-0)+\cancel{\frac{1}{2}\cdot 0^2}-\cancel{2\cdot 0}+3$$

∴ $y=-2x+3$ ……④　となる。

(ⅱ) $t=6$ のとき，これを②に代入して，

$$y=(6-2)(x-6)+18-12+3=4(x-6)+9$$

∴ $y=4x-15$ ……⑤　となる。

以上 (ⅰ)(ⅱ) の④，⑤より，点 A を通り，放物線 $y=f(x)$ に接する接線は 2 本存在し，その方程式を列記すると，

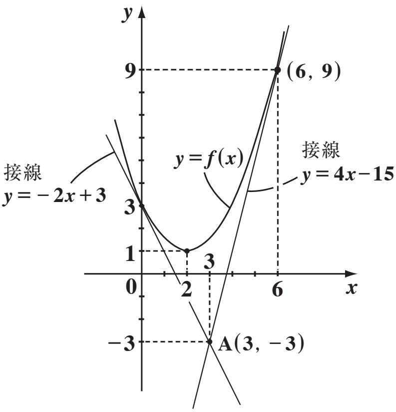
$$\begin{cases} y=-2x+3 \text{ ……④} \\ y=4x-15 \text{………⑤} \end{cases}$$ である。　step(ⅲ)

$$y=f(x)=\frac{1}{2}(x^2\underline{-4x}+\underline{\underline{4}})+3\underline{\underline{-2}}$$

2 で割って
2 乗

$$=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$$ より，

この放物線 $y=f(x)$ と点 A(3，−3) と，この点を通る 2 本の接線のグラフを右に示しておくね。



これで今日の授業はすべて終了です。みんなよく頑張ったね！