

(i) $\overrightarrow{MQ} \perp \vec{a}$ より, $\overrightarrow{MQ} \cdot \vec{a} = 0$ ……⑥ ここで,

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OM} = \left(s - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + t\vec{b} \text{ より,}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{s\vec{a} + t\vec{b}} \\ \text{(⑤より)} \end{array} - \begin{array}{c} \boxed{\frac{1}{2}\vec{a}} \end{array}$$

これを⑥に代入して,

$$\left\{ \left(s - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + t\vec{b} \right\} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\left(s - \frac{1}{2}\right) \cdot 4^2 + t \cdot \frac{5}{2} = 0$$

$\therefore \underline{32s + 5t = 16}$ ……⑦ となる。

(ii) $\overrightarrow{NQ} \perp \vec{b}$ より, $\overrightarrow{NQ} \cdot \vec{b} = 0$ ……⑧ ここで,

$$\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{ON} = s\vec{a} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\vec{b} \text{ より,}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{s\vec{a} + t\vec{b}} \\ \text{(⑤より)} \end{array} - \begin{array}{c} \boxed{\frac{1}{2}\vec{b}} \end{array}$$

これを⑧に代入して,

$$\left\{ s\vec{a} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\vec{b} \right\} \cdot \vec{b} = 0$$

$$s \cdot \frac{5}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot 5^2 = 0$$

$\therefore \underline{s + 10t = 5}$ ……⑨ となる。

以上 (i)(ii) より, $2 \times \text{⑦} - \text{⑨}$ から,

$$63s = 27 \quad \therefore s = \frac{27}{63} = \frac{3}{7}$$

$$\text{⑨より, } 10t = 5 - \frac{3}{7} = \frac{32}{7} \quad \therefore t = \frac{32}{70} = \frac{16}{35}$$

s, t の値を⑤に代入して,

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{7}\vec{a} + \frac{16}{35}\vec{b} \text{ である。} \dots\dots\dots(\text{答})$$

△OABは、直角三角形ではないので、 $\overrightarrow{MQ} = \vec{0}$ や $\overrightarrow{NQ} = \vec{0}$ となることはないんだね。

$$\Leftrightarrow \left(s - \frac{1}{2}\right)|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\begin{array}{c} \boxed{4^2} \\ \text{(①より)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{\frac{5}{2}} \\ \text{(④より)} \end{array}$$

$$16s - 8 + \frac{5}{2}t = 0$$

$$32s + 5t = 16$$

$$\Leftrightarrow s\vec{a} \cdot \vec{b} + \left(t - \frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2 = 0$$

$$\begin{array}{c} \boxed{\frac{5}{2}} \\ \text{(④より)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{5^2} \\ \text{(②より)} \end{array}$$

$$\frac{5}{2}s + 25t - \frac{25}{2} = 0$$

$$5s + 50t - 25 = 0$$

$$s + 10t = 5$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \text{⑦} - \text{⑨}$$

$$64s + 10t = 32$$

$$s + 10t = 5 \quad (-)$$

$$63s = 27$$