

条件付き確率の問題(Ⅲ)

演習問題 61

難易度 ★★★

CHECK 1

CHECK 2

CHECK 3

初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある。その袋に対して以下の試行を繰り返す。

- (i) まず同時に 2 個の玉を取り出す。
- (ii) その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し、色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる。
- (iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ、1 回の試行を終える。

n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする。

- (1) $X_1 = 3$ となる確率を求めよ。
- (2) $X_2 = 3$ となる確率を求めよ。
- (3) $X_2 = 3$ であったとき、 $X_1 = 3$ である条件付き確率を求めよ。(北海道大)

ヒント! 1 回の試行で、取り出した 2 個の玉が、(i) 同色であれば、それを戻して、白玉を 1 個入れ、(ii) 色違いならば、それを戻さずに、代わりに赤玉 2 個と白玉 1 個入れる。ということは、袋の中の玉は 1 回の試行で、取り出した 2 個が、(i) 同色ならば、白玉が 1 個増え、(ii) 色違いならば、赤玉が 1 個増える、ということになるんだね。

解答&解説

初め赤、白 2 個ずつの玉が入った袋から 2 個の玉を取り出し、それが、

- { (i) 同色ならば、白玉が 1 個増え、
- { (ii) 色違いならば、赤玉が 1 個増える。

この試行を n 回行った後、袋の中の赤玉の個数を X_n とおく。($n = 1, 2, 3, \dots$)

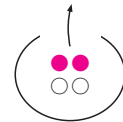
(1) $X_1 = 3$ となる確率 $P(X_1 = 3)$ は、

1 回目の試行で、色違いの玉を取り出す確率に等しい。

$$\therefore P(X_1 = 3) = \frac{\overset{\text{白2から1個}}{2C_1} \times \overset{\text{赤2から1個}}{2C_1}}{4C_2} = \frac{2 \times 2}{6} = \frac{2}{3} \dots \dots \textcircled{1} \dots \text{(答)}$$

ココがポイント

- { (i) 同色 ○○ (●●)
- { (ii) 色違い ○●



$$\begin{aligned} {}_2C_1 &= 2 \\ {}_4C_2 &= \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \end{aligned}$$

(2) $X_2 = 3$ となる確率 $P(X_2 = 3)$ は、

{ (i) 1 回目が色違いで、2 回目が同色であるか、または、
 (ii) 1 回目が同色で、2 回目が色違いになる確率に等しい。

よって、赤3から2個 白2から2個

$$P(X_2 = 3) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} + \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \right)$$

(i) 1 回目は色違いで、赤は 3 個になる。 2 回目は、同色 (赤赤または白白) になる。

(①より)

赤2から1個 白3から1個

$$+ \left(1 - \frac{2}{3} \right) \times \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2}$$

(ii) 1 回目は同色で、白が 3 個になる。 2 回目は色違い (赤、白) になる。

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 3}{10} = \frac{7}{15} \dots \textcircled{2} \dots (\text{答})$$

⇐ { (i) $X_1 = 3, X_2 = 3$
 (ii) $X_1 = 2, X_2 = 3$
 のいずれかだね。

$$\Leftrightarrow {}_5C_2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

$${}_2C_2 = 1$$

$${}_2C_1 = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

(3) 2 つの事象 A, B を次のようにおく。

$A: X_2 = 3$ である。 $B: X_1 = 3$ である。

このとき、事象 A が起こったという条件の下で、事象 B の起こる条件付き確率 $P_A(B)$ は、

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \dots \textcircled{3} \text{ である。}$$

$$\text{ここで、} P(A) = P(X_2 = 3) = \frac{7}{15} \text{ (②より)} \dots \textcircled{2}$$

$$P(A \cap B) = P(X_1 = 3 \text{ かつ } X_2 = 3) = \frac{4}{15} \dots \textcircled{4}$$

(2) の (i) 1 回目は色違い、2 回目は同色。

②, ④を③に代入して、

$$P_A(B) = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{4}{7} \text{ である。} \dots \textcircled{\hspace{1cm}} (\text{答})$$

$$\Leftrightarrow P(A) = P(X_2 = 3) = \frac{7}{15}$$

(②より)

$$P(A \cap B)$$

$$= P(X_1 = 3 \text{ かつ } X_2 = 3)$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} + \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \right)$$

(2) の (i) の確率のこと。

1 回目が色違い、2 回目が同色。

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10} \right) = \frac{8}{30}$$

$$= \frac{4}{15}$$