

補充問題 3

難易度 ★★★

CHECK 1

CHECK 2

CHECK 3

1枚の硬貨を何回か投げ、表が2回続けて出たら終了する試行を行う。ちょうど n 回で終了する確率を P_n とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 を求めよ。
- (2) P_{n+2} を P_{n+1} および P_n を用いて表せ。ただし、 $n=1, 2, 3, \dots$ とする。
- (3) P_n ($n=1, 2, 3, \dots$) を n を用いて表せ。 (大阪市大*)

ヒント! (1)では、表を“○”、裏を“×”と表して具体的に $n=1, 2, 3, 4, 5$ のときの P_n を求めればよい。(2)では、1回目が(i)○の場合と、(ii)×の場合に場合分けするとうまくいくよ。(3)では、数列 $\{P_n\}$ の3項間の漸化式の解法パターンに従って解いていけばいいんだね。頑張ろう!

(1) 1回硬貨を投げて、表が出たら“○”、裏が出たら“×”で表すことにする。最後に表が2回(○, ○)出て、ちょうど n 回目に終了する確率が P_n より、

(i) $n=1$ のとき、
1回で終了することはないので、
 $P_1=0$ ……………(答)

(ii) $n=2$ のとき、
○○の1通りより、
 $P_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ ……………(答)

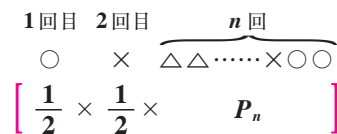
(iii) $n=3$ のとき、
×○○の1通りより、
 $P_3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ ……………(答)

(iv) $n=4$ のとき、
 $\begin{cases} \text{○} \times \text{○} \text{○} \\ \text{×} \times \text{○} \text{○} \end{cases}$ の2通りより、
 $P_4=2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$ ……………(答)

(v) $n=5$ のとき、
 $\begin{cases} \text{○} \times \times \text{○} \text{○} \\ \text{×} \times \times \text{○} \text{○} \\ \text{×} \text{○} \times \text{○} \text{○} \end{cases}$ の3通りより、
 $P_5=3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{32}$ ……………(答)

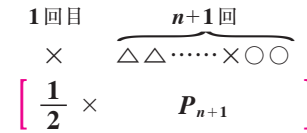
(2) 1回目が(i)表(○)である場合と、(ii)裏(×)である場合に、場合分けして、 $n+2$ 回目に終了する確率 P_{n+2} ($n=2, 3, 4, \dots$) について調べる。

(i) 1回目が表(○)の場合、
2回目は必ず裏(×)でなければならない。そして、3回目以降 n 回の試行を行って、 $n+2$ 回目に終了する様子を下に模式図で示す。



よって、この確率は $\frac{1}{4} P_n$ である。

(ii) 1回目が裏(×)の場合、
2回目以降 $n+1$ 回の試行を行って、 $n+2$ 回目に終了する様子を下に模式図で示す。



よって、この確率は $\frac{1}{2} P_{n+1}$ である。

最後に表が2回出て、ちょうど $n+2$ 回目に終了する確率 P_{n+2} は、(i) または(ii)の2つの排反事象の確率の和となる。

$\therefore P_{n+2} = \frac{1}{2} P_{n+1} + \frac{1}{4} P_n \dots \textcircled{1} \dots$ (答)
($n=1, 2, 3, \dots$)

①は、 $n=1$ のとき、 $P_3 = \frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{4} P_1$ となって、みちます。
 $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0$

(3) $\begin{cases} P_1=0, P_2=\frac{1}{4} \\ P_{n+2}=\frac{1}{2} P_{n+1} + \frac{1}{4} P_n \dots \textcircled{1} \end{cases}$ ($n=1, 2, \dots$)

から、一般項 P_n ($n=1, 2, \dots$) を求める。

これは、3項間の漸化式より、特性方程式 $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ を解いて、
 $4x^2 - 2x - 1 = 0 \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$ より、
 $\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \alpha, \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \beta$ とおいて解く。

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ とおくと、①は、

$$\begin{cases} P_{n+2} - \alpha P_{n+1} = \beta(P_{n+1} - \alpha P_n) \\ [F(n+1) = \beta \cdot F(n)] \\ P_{n+2} - \beta P_{n+1} = \alpha(P_{n+1} - \beta P_n) \\ [G(n+1) = \alpha \cdot G(n)] \end{cases}$$

となる、これから、

$$\begin{cases} P_{n+1} - \alpha P_n = \underbrace{\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\beta}_{\frac{1}{4}} P_n \dots \textcircled{2} \\ [F(n) = F(1) \cdot \beta^{n-1}] \\ P_{n+1} - \beta P_n = \underbrace{\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\alpha}_{\frac{1}{4}} P_n \dots \textcircled{3} \\ [G(n) = G(1) \cdot \alpha^{n-1}] \end{cases}$$

となる。よって、③-②より、

$(\alpha - \beta) P_n = \frac{1}{4} (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})$

$\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$P_n = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{4} (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})$

$\therefore P_n = \frac{\sqrt{5}}{10} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} \right\}$

($n=1, 2, 3, \dots$) である。

……………(答)

この答えは、無理数 $\sqrt{5}$ を含む複雑な式に見えるけれど、実際に計算すると、

$P_1 = \frac{\sqrt{5}}{10} (1-1) = 0$

$P_2 = \frac{\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{1-\sqrt{5}}{4} \right) = \frac{\sqrt{5}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}$

など…となって、 $\{P_n\}$ の一般項を表す式であることが分かるんだね。