補充問題 3　難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

1 枚の硬貨を何回か投げ，表が **2** 回続けて出たら終了する試行を行う。ちょうど n 回で終了する確率を P_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 を求めよ。

(2) P_{n+2} を P_{n+1} および P_n を用いて表せ。ただし，$n=1, 2, 3, \cdots$ とする。

(3) P_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を n を用いて表せ。　（大阪市大＊）

ヒント！ **(1)** では，表を“○”，裏を“×”と表して具体的に $n=1, 2, 3, 4, 5$ のときの P_n を求めればよい。**(2)** では，**1** 回目が (i) ○の場合と，(ii) ×の場合に場合分けするとうまくいくよ。**(3)** では，数列 $\{P_n\}$ の **3** 項間の漸化式の解法パターンに従って解いていけばいいんだね。頑張ろう！

(1) **1** 回硬貨を投げて，表が出たら“○”，裏が出たら“×”で表すことにする。最後に表が **2** 回 (○, ○) 出て，ちょうど n 回目に終了する確率が P_n より，

(i) $n=1$ のとき，
1 回で終了することはないので，
$P_1=0$ ……………………(答)

(ii) $n=2$ のとき，
○○の **1** 通りより，
$P_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ …………(答)

(iii) $n=3$ のとき，
×○○の **1** 通りより，
$P_3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ …………(答)

(iv) $n=4$ のとき，
$\begin{cases}○×○○\\××○○\end{cases}$ の **2** 通りより，
$P_4=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$ ………(答)

(v) $n=5$ のとき，
$\begin{cases}○××○○\\×××○○\\×○×○○\end{cases}$ の **3** 通りより，
$P_5=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{32}$ ………(答)

(2) **1** 回目が (i) 表 (○) である場合と，(ii) 裏 (×) である場合に，場合分けして，$n+2$ 回目に終了する確率 P_{n+2} $(n=2,3,4,\cdots)$ について調べる。

(i) **1** 回目が表 (○) の場合，
2 回目は必ず裏 (×) でなければならない。そして，**3** 回目以降 n 回の試行を行って，$n+2$ 回目に終了する様子を下に模式図で示す。

1回目　2回目　$\overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{n\text{回}}$
○　×　△△……×○○
$\left[\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\quad P_n\ \right]$

よって，この確率は $\frac{1}{4}P_n$ である。

(ii) **1** 回目が裏 (×) の場合，
2 回目以降 $n+1$ 回の試行を行って，$n+2$ 回目に終了する様子を下に模式図で示す。

1回目　$\overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{n+1\text{回}}$
×　△△……×○○
$\left[\ \frac{1}{2}\times\quad P_{n+1}\ \right]$

よって，この確率は $\frac{1}{2}P_{n+1}$ である。

最後に表が **2** 回出て，ちょうど $n+2$ 回目に終了する確率 P_{n+2} は，(i) または (ii) の **2** つの排反事象の確率の和となる。

$\therefore P_{n+2}=\frac{1}{2}P_{n+1}+\frac{1}{4}P_n$ …① …(答)
$(n=1, 2, 3, \cdots)$

①は，$n=1$ のとき，$\underbrace{P_3}_{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}\underbrace{P_2}_{\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\underbrace{P_1}_{0}$
となって，みたす。

(3) $\begin{cases}P_1=0,\ P_2=\frac{1}{4}\\ P_{n+2}=\frac{1}{2}P_{n+1}+\frac{1}{4}P_n \ \cdots\cdots①\end{cases}$
$(n=1, 2, \cdots)$

から，一般項 P_n $(n=1, 2, \cdots)$ を求める。

これは，**3** 項間の漸化式より，特性方程式
$x^2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ を解いて，
$4x^2-2x-1=0$　$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ より，
$\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\alpha$，$\frac{1-\sqrt{5}}{4}=\beta$ とおいて解く。

$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，$\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ とおくと，①は，

$$\begin{cases}P_{n+2}-\alpha P_{n+1}=\beta(P_{n+1}-\alpha P_n)\\ [\ F(n+1)\ =\beta\cdot\ F(n)\ ]\\ P_{n+2}-\beta P_{n+1}=\alpha(P_{n+1}-\beta P_n)\\ [\ G(n+1)\ =\alpha\cdot\ G(n)\ ]\end{cases}$$

となる。これから，

$$\begin{cases}P_{n+1}-\alpha P_n=(\underbrace{P_2}_{\frac{1}{4}}-\cancel{\alpha}\underbrace{\cancel{P_1}}_{0})\beta^{n-1}\ \cdots②\\ [\ F(n)\ =\ F(1)\ \cdot\beta^{n-1}]\\ P_{n+1}-\beta P_n=(\underbrace{P_2}_{\frac{1}{4}}-\cancel{\beta}\underbrace{\cancel{P_1}}_{0})\alpha^{n-1}\ \cdots③\\ [\ G(n)\ =\ G(1)\ \cdot\alpha^{n-1}]\end{cases}$$

となる。よって，③−②より，

$$(\alpha-\beta)P_n=\frac{1}{4}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})$$

$\frac{\cancel{1}+\sqrt{5}}{4}-\frac{\cancel{1}-\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$P_n=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{4}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})$$

$$\therefore P_n=\frac{\sqrt{5}}{10}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

$(n=1, 2, 3, \cdots)$ である。
………(答)

この答えは，無理数 $\sqrt{5}$ を含む複雑な式に見えるけれど，実際に計算すると，
$P_1=\frac{\sqrt{5}}{10}(1-1)=0$
$P_2=\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\cancel{1}+\sqrt{5}}{4}-\frac{\cancel{1}-\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{4}$
など…となって，$\{P_n\}$ の一般項を表す式であることが分かるんだね。