演習問題 70　難易度 ★★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{7a_n - 1}{4a_n + 3}$　$(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ を満たすとする。

(1) $n = 1, 2, \cdots\cdots$ に対し，$a_n > \dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(2) $b_n = \dfrac{2}{2a_n - 1}$　$(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ で定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，数列 $\{a_n\}$の一般項を求めよ。　（信州大 ＊）

ヒント！ (1) では，(i) $a_1 > \dfrac{1}{2}$ を示し，(ii) $a_k > \dfrac{1}{2}$ と仮定して，$a_{k+1} > \dfrac{1}{2}$ を示せばいいんだね。(2)では，数列 $\{b_n\}$の漸化式として，$b_{n+1} = b_n + p$　(p：定数) が導けるはずだ。頑張ろう！

解答＆解説

(1) 数列 $\{a_n\}$ が，次式で定義されている。

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{7a_n - 1}{4a_n + 3} \cdots\cdots ①\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，$a_n > \dfrac{1}{2} \cdots\cdots (*)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

(i) $n = 1$ のとき，$a_1 = 1 > \dfrac{1}{2}$ となって，$(*)$ をみたす。

(ii) $n = k$　$(k = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき，

$a_k > \dfrac{1}{2} \cdots\cdots ②$　が成り立つと仮定して，

$n = k + 1$ のときを調べる。①の n に k を代入して，$\dfrac{1}{2}$ を引くと，

$$a_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{7a_k - 1}{4a_k + 3} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2(7a_k - 1) - (4a_k + 3)}{2(4a_k + 3)} = \frac{5(\overset{\oplus}{2a_k - 1})}{2(\underset{\oplus}{4a_k + 3})} \cdots\cdots ③$$

ココがポイント

⇦ (i) $a_1 > \dfrac{1}{2}$ を示し，(ii) $a_k > \dfrac{1}{2}$　$(k = 1, 2, \cdots)$ と仮定して，$a_{k+1} > \dfrac{1}{2}$ を示す。

⇦ $a_{k+1} - \dfrac{1}{2} > 0$ を示して，$a_{k+1} > \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示す。

ここで，$a_k > \frac{1}{2}$ ……② より，$2a_k - 1 > 0$，

$4a_k + 3 > 0$ だから，③より，$a_{k+1} - \frac{1}{2} > 0$

$\therefore\ a_{k+1} > \frac{1}{2}$ となる。

以上(i)(ii)より，数学的帰納法により，

(＊)は成り立つ。 ………………………………(終)

(2) $b_n = \dfrac{2}{2a_n - 1}$ ……④ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より，

$b_{n+1} = \dfrac{2}{2a_{n+1} - 1}$ ……④´ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

となる。③より，

$$\underbrace{\frac{2}{2a_{n+1} - 1}}_{b_{n+1}} = \underbrace{\frac{2}{2a_n - 1}}_{b_n} \times \frac{2(\overbrace{2a_n - 1}^{\frac{2}{b_n}}) + 5}{5} \quad \cdots\cdots③´$$

③´に④，④´を代入して，

$$b_{n+1} = b_n \times \frac{1}{5}\left(\frac{4}{b_n} + 5\right) = b_n + \frac{4}{5}$$

$b_1 = \dfrac{2}{2a_1 - 1} = \dfrac{2}{2 \cdot 1 - 1} = 2$ より，数列 $\{b_n\}$ は，

$b_1 = 2$，$b_{n+1} = b_n + \dfrac{4}{5}$ ……⑤ と定義される。

⑤より，等差数列 $\{b_n\}$ の一般項は，

$$b_n = 2 + (n - 1) \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}n + \frac{6}{5} \quad \cdots\cdots⑥$$

$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。 ……………………(答)

④より，$a_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{b_n} + 1\right)$ ……④´´

④´´に⑥を代入して，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = \frac{4(n+4)}{4(2n+3)} = \frac{n+4}{2n+3} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。 ………………………………………………(答)

⇦④より，$b_{n+1} = \dfrac{2}{2a_{n+1} - 1}$

⇦$a_{k+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5(2a_k - 1)}{2(4a_k + 3)}$ より，

$\dfrac{2a_{n+1} - 1}{2} = \dfrac{5(2a_n - 1)}{2(4a_n + 3)}$

両辺の逆数をとって，

$$\frac{2}{2a_{n+1} - 1} = \frac{2}{2a_n - 1} \cdot \frac{\overbrace{4a_n + 3}^{2(2a_n - 1) + 5}}{5}$$

⇦$\{b_n\}$ は，初項 $b_1 = 2$，公差 $d = \dfrac{4}{5}$ の等差数列より，

$b_n = 2 + (n - 1) \cdot \dfrac{4}{5}$

⇦$a_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\frac{4n+6}{5}} + 1\right)$

$= \dfrac{5}{4n + 6} + \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{10 + 4n + 6}{2(4n + 6)}$

$= \dfrac{4(n + 4)}{4(2n + 3)}$