放物線と直線とで挟まれる図形の面積

絶対暗記問題 82	難易度 ★★	CHECK1	CHECK2	CHECK3

曲線 $C : y = x^2 - |x|$ と直線 $l : y = x + 1$ について，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C のグラフの概形を描け。

(2) 曲線 C と直線 l との交点の x 座標を求めよ。

(3) 曲線 C と直線 l とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。　（昭薬大＊）

ヒント！ (1) $|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ より，曲線 $C : y = \begin{cases} x^2 - x & (x \geqq 0) \\ x^2 + x & (x < 0) \end{cases}$ となるんだね。(2) では，(i) $x < 0$ と (ii) $x \geqq 0$ に場合分けして，交点の x 座標を求めよう。(3) でも，(i) $x < 0$ と (ii) $x \geqq 0$ に場合分けして，それぞれの面積を求めて，その和をとればいいんだね。

解答＆解説

曲線 $C : y = f(x) = x^2 - |x|$ ……① と，直線 $l : y = x + 1$ ……② とおく。

(1) 曲線 $C : y = f(x) = \begin{cases} x^2 - x & (x \geqq 0) \\ x^2 + x & (x < 0) \end{cases}$ ……① より，

$\because |x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$

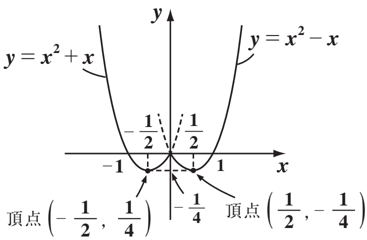
(i) $x \geqq 0$ のとき，$y = f(x) = x(x-1) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$

$x = 0, 1$ で交わり，頂点 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ の下に凸の放物線

(ii) $x < 0$ のとき，$y = f(x) = x(x+1)$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$x = -1, 0$ で交わり，頂点 $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ の下に凸の放物線



以上より，曲線 C のグラフの概形を右図に示す。……………………………(答)

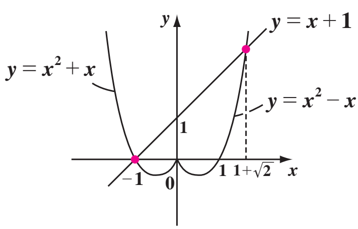
(2) (i) $x < 0$ のとき，

$C : y = f(x) = x^2 + x$ と $l : y = x + 1$

から，y を消去して，

$x^2 + \cancel{x} = \cancel{x} + 1 \quad x^2 = 1$

$\therefore x = -1 \quad (\because x < 0)$



(ⅱ) $x \geqq 0$ のとき,

$C : y = f(x) = x^2 - x$ と $l : y = x + 1$

から, y を消去して,

$x^2 - x = x + 1$ より, $x^2 - 2x - 1 = 0$

$\therefore x = 1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-1)} = 1 \pm \underbrace{\sqrt{2}}_{1.414\cdots}$

$ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解

$x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$

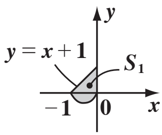
$\therefore x = 1 + \sqrt{2}$ $(\because x \geqq 0)$

以上(ⅰ)(ⅱ)より, 曲線 C と直線 l との交点の x 座標は,

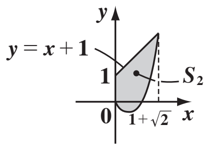
$x = -1$ と $1 + \sqrt{2}$ である。……………………………………………(答)

(3) 曲線 $C : y = f(x)$ と直線 $l : y = x + 1$ とで囲まれる図形の面積 S は, (ⅰ) $x < 0$ のときの面積 S_1 と (ⅱ) $x \geqq 0$ のときの面積 S_2 の和として求められる。よって,

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{0} \{x + 1 - \overbrace{f(x)}^{(x^2 + x)}\}\,dx + \int_{0}^{1+\sqrt{2}} \{x + 1 - \overbrace{f(x)}^{(x^2 - x)}\}\,dx$$



+



$$= \int_{-1}^{0} (\cancel{x} + 1 - x^2 - \cancel{x})\,dx + \int_{0}^{1+\sqrt{2}} (x + 1 - x^2 + x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^2 + 1)\,dx + \int_{0}^{1+\sqrt{2}} (-x^2 + 2x + 1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_{0}^{1+\sqrt{2}}$$

$0 - \left\{-\dfrac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 1\right\}$

$= -\dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{2}{3}$

$-\dfrac{1}{3}(1 + \sqrt{2})^3 + (1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} - 0$

$= -\dfrac{1}{3}(1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2}) + 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 + \sqrt{2}$

$= -\dfrac{7}{3} - \dfrac{5\sqrt{2}}{3} + 4 + 3\sqrt{2} = \dfrac{5}{3} + \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore S = \underline{S_1} + \underline{\underline{S_2}} = \underline{\dfrac{2}{3}} + \underline{\underline{\dfrac{5 + 4\sqrt{2}}{3}}} = \dfrac{7 + 4\sqrt{2}}{3}$ である。………………(答)