2. 確率変数の和と積の期待値，分散も調べよう！

前回，**2** 変数の和の期待値の公式 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ を用いて問題を解いたけれど，この背景には**同時確率分布**の考え方があるので，この公式の証明は意外と難しい。ここではさらに，X と Y が独立な確率変数であるとき，$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ など…の公式が成り立つことも示そう。

さらに，反復試行の確率から導かれる**二項分布**についても教えるつもりだ。では，早速講義を始めよう！

● $E(X+Y)$ と $E(XY)$ を調べよう！

表1　X と Y の確率分布表

(ⅰ) X の確率分布表

変数 X	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
確率 P	p_1	p_2	$\cdots$	p_m

(ⅱ) Y の確率分布表

変数 Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
確率 Q	q_1	q_2	$\cdots$	q_n

表 **1** に示すように，**2** つの確率変数 $X=x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m$，$Y=y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ の確率分布が与えられている場合，それぞれの期待値 $E(X)$ と $E(Y)$ が，

$$E(X)=\underbrace{x_1}_{\text{確率変数}}\underbrace{p_1}_{\text{確率}}+x_2p_2+\cdots+x_mp_m$$

$$E(Y)=y_1q_1+y_2q_2+\cdots+y_nq_n$$

となるのは大丈夫だね。でも，ここでは話を少し簡単にするために，$X=x_1,\ x_2$，$Y=y_1,\ y_2,\ y_3$ としよう。すると，$E(X)$ と $E(Y)$ は同様に，

$E(X)=x_1p_1+x_2p_2$ …①，$E(Y)=y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3$ …②　となるのはいいね。では，ここで，$X+Y$ の期待値 $E(X+Y)$ を考えてみよう。この場合，$X+Y$ の具体的な値は，

$X+Y=x_1+y_1,\ x_1+y_2,\ x_1+y_3,$
$\qquad x_2+y_1,\ x_2+y_2,\ x_2+y_3$ の

6 通りになるので，X と Y の確率分布を同時に考えなければならない。よって，表 **2** に示す X と Y の確率分布のことを**同時確率分布**という。これは，$X=x_i$，かつ $Y=y_j$ となる確率を，

$P(X=x_i,\ Y=y_j)=r_{ij}$ $(i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3)$ とおいているんだね。

表2　X と Y の同時確率分布

X \ Y	y_1	y_2	y_3	計	
x_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	p_1	$=r_{11}+r_{12}+r_{13}$
x_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	p_2	$=r_{21}+r_{22}+r_{23}$
計	q_1	q_2	q_3	**1**	
	$=r_{11}+r_{21}$	$=r_{12}+r_{22}$	$=r_{13}+r_{23}$		

具体的には，$P(X=x_1,\ Y=y_1)=r_{11}$，$P(X=x_1,\ Y=y_2)=r_{12}$，…，$P(X=x_2,\ Y=y_3)=r_{23}$ のことなんだね。そして，

$P(X=x_1)=r_{11}+r_{12}+r_{13}=p_1$，$P(X=x_2)=r_{21}+r_{22}+r_{23}=p_2$

$P(Y=y_1)=r_{11}+r_{21}=q_1$，$P(Y=y_2)=r_{12}+r_{22}=q_2$，$P(Y=y_3)=r_{13}+r_{23}=q_3$

となっていることも確認しておこう。

では，準備が整ったので，$E(X+Y)$ の期待値を求めると，

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \underbrace{(x_1+y_1)}_{\text{確率変数}}\cdot\underbrace{r_{11}}_{\text{確率}}+(x_1+y_2)\cdot r_{12}+(x_1+y_3)\cdot r_{13}\\
&\quad +(x_2+y_1)\cdot r_{21}+(x_2+y_2)\cdot r_{22}+(x_2+y_3)\cdot r_{23}\\
&= x_1(\underbrace{r_{11}+r_{12}+r_{13}}_{p_1})+x_2(\underbrace{r_{21}+r_{22}+r_{23}}_{p_2})\\
&\quad +y_1(\underbrace{r_{11}+r_{21}}_{q_1})+y_2(\underbrace{r_{12}+r_{22}}_{q_2})+y_3(\underbrace{r_{13}+r_{23}}_{q_3})\\
&= \underbrace{x_1p_1+x_2p_2}_{E(X)}+\underbrace{y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3}_{E(Y)}=E(X)+E(Y)
\end{aligned}$$

となって，

X と Y の和の期待値の公式

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ ……$(*1)$ が導けるんだね。

そして，この $(*1)$ と前回学んだ公式 $E(aX+b)=aE(X)+b$ を併用すれば，複数の確率変数に対して次のような期待値の公式も導けるんだね。

期待値 $E(X+Y)$ などの公式

(1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ ……$(*1)$

(2) $E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$

(3) $E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$

(4) $E(aX+bY+cZ)=aE(X)+bE(Y)+cE(Z)$

(5) $E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$

（ただし，a，b，c は，実数定数とする。）

では，X と Y の積 XY の期待値 $E(XY)$ について，

$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$ ……(＊2)　は，成り立つのだろうか？

一般に，(＊2) は成り立たないけれど，次の式：

$$\underbrace{P(X=x_i,\ \ Y=y_j)}_{r_{ij}\text{のこと}}=\underbrace{P(X=x_i)}_{p_i}\times\underbrace{P(Y=y_j)}_{q_j\text{のこと}}\quad\cdots\cdots①\quad(i=1,\ 2,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

すなわち，$r_{ij}=p_i\times q_j$ が成り立つとき，X と Y は独立な確率変数といい，そして，X と Y が独立であるときのみ，(＊2) は成り立つと言える。

このとき，表 2 の各確率 r_{ij} を具体的に示すと，

$r_{11}=p_1\cdot q_1$，$r_{12}=p_1\cdot q_2$，$r_{13}=p_1\cdot q_3$，$r_{21}=p_2\cdot q_1$，$r_{22}=p_2\cdot q_2$，$r_{23}=p_2\cdot q_3$ となるので，これらを代入した新たな同時確率分布表を表 3 に示そう。これから独立な 2 つの確率変数 X と Y の積の期待値 $E(XY)$ を計算してみると，

表 3　独立な X と Y の同時確率分布

X \ Y	y_1	y_2	y_3	計
x_1	p_1q_1	p_1q_2	p_1q_3	p_1
x_2	p_2q_1	p_2q_2	p_2q_3	p_2
計	q_1	q_2	q_3	1

$p_1q_1+p_2q_1=(\underbrace{p_1+p_2}_{1(\text{全確率})})q_1=q_1$　他も同様。

$$\begin{aligned}E(XY)&=\underbrace{x_1y_1}_{\text{確率変数}}\ \underbrace{p_1q_1}_{\text{確率}}+x_1y_2p_1q_2\\&\quad+x_1y_3p_1q_3+x_2y_1p_2q_1\\&\quad+x_2y_2p_2q_2+x_2y_3p_2q_3\\&=x_1p_1\underbrace{(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3)}_{E(Y)}+x_2p_2\underbrace{(y_1q_1+y_2q_2+y_3q_3)}_{E(Y)}\\&=\underbrace{(x_1p_1+x_2p_2)}_{E(X)}\cdot E(Y)=E(X)\cdot E(Y)\end{aligned}$$

となって，

独立な 2 つの確率変数 X と Y の積の期待値 $E(XY)$ の公式：

$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$ ……(＊2)　が導かれるんだね。面白かった？

そして，この (＊2) から，X と Y の積の分散 $V(X+Y)$ の次の公式も導ける。

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ …(＊3)

これは，次のように証明できるんだね。

公式：
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
を使った。

$$\begin{aligned}V(X+Y)&=E(\underbrace{(X+Y)^2}_{X^2+2XY+Y^2})-\{\underbrace{E(X+Y)}_{E(X)+E(Y)\ ((＊1)\text{より})}\}^2\\&=\underbrace{E(X^2+2XY+Y^2)}_{E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)}-\underbrace{\{E(X)+E(Y)\}^2}_{\{E(X)\}^2+2E(X)E(Y)+\{E(Y)\}^2}\end{aligned}$$

よって，

$$V(X+Y)=E(X^2)+\underbrace{\cancel{2E(XY)}}_{E(X)\cdot E(Y)((*2)\text{より})}+E(Y^2)-\{E(X)\}^2-\cancel{2E(X)E(Y)}-\{E(Y)\}^2$$

$$=\underbrace{E(X^2)-\{E(X)\}^2}_{V(X)}+\underbrace{E(Y^2)-\{E(Y)\}^2}_{V(Y)}=V(X)+V(Y)$$ となって，

独立な確率変数 X と Y の和の分散 $V(X+Y)$ の公式：

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ …$(*3)$　が導かれるんだね。

そして，この $(*3)$ と前回教えた公式 $V(aX+b)=a^2V(X)$ を併用すれば，複数の独立な確率変数に対して，次のような分散の公式が導けることも分かるはずだ。

分散 $V(X+Y)$ などの公式

独立な確率変数 X，Y，Z，X_1，X_2，…，X_n に対して

(0) $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$ ……$(*2)$

(1) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ ……$(*3)$

(2) $V(aX+bY+c)=a^2V(X)+b^2V(Y)$

(3) $V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)$

(4) $V(aX+bY+cZ)=a^2V(X)+b^2V(Y)+c^2V(Z)$

(5) $V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$

では，例題をやっておこう。

2 つの独立な確率変数 X と Y について，

$E(X)=3$，$E(Y)=5$，$V(X)=2$，$V(Y)=4$ のとき，$E(XY)$，$V(X+Y)$，$V(3X+4Y+5)$ を求めてみよう。

・$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=3\times5=15$

・$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=2+4=6$

・$V(3X+4Y+\underbrace{5}_{\text{分散に，定数項は影響しない。}})=3^2V(X)+4^2V(Y)=9\times2+16\times4=82$

どう？公式の証明は結構メンドウだったけれど，結果の公式は非常に使いやすいだろう？問題を解くのにドンドン利用して，利用しながら覚えていってくれたらいいんだね。

● 二項分布の期待値，分散はスグに計算できる!

反復試行の確率については覚えているね。もう一度，復習しておこう!

反復試行の確率

ある試行を 1 回行って，事象 A の起こる確率を p とおく。
この試行を n 回行って，そのうち r 回だけ事象 A の起こる確率は，

$$\boxed{{}_n\mathrm{C}_r\, p^r q^{n-r}} \quad (r = 0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n) \quad \text{である。}$$

$$(p = P(A),\ q = P(\overline{A}),\ p + q = 1)$$

この r を確率変数 X とおくと，$X = r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ に対応する確率は，${}_n\mathrm{C}_0 p^0 q^n$，${}_n\mathrm{C}_1 p^1 q^{n-1}$，${}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2}$，$\cdots\cdots$，${}_n\mathrm{C}_n p^n q^0$ だね。$p^0 = q^0 = 1$ に気を付けて，確率分布表を書けば，これが **"二項分布"** と呼ばれる確率分布になるんだよ。

二項分布

確率変数 X	0	1	2	$\cdots\cdots\cdots$	n
確　率　P	${}_n\mathrm{C}_0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 p\, q^{n-1}$	${}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots\cdots\cdots$	${}_n\mathrm{C}_n p^n$

ここで，まず，この確率の総和をとると，

$$\boxed{{}_n\mathrm{C}_0 q^n + {}_n\mathrm{C}_1 p q^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n p^n = (p + q)^n}$$

となるのは大丈夫？ 表現の仕方がちょっと違うけれど，これは数学 II で勉強した二項定理そのものなんだよ。ここで，$p + q = P(A) + P(\overline{A}) = 1$ だから，この確率の総和 $= (p + q)^n = 1^n = \underbrace{1}_{\text{全確率}}$ となってうまくいくんだね。

> 二項定理は
> $(a + b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2} b^2 + \cdots\cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$
> だね。よって，
> $(p + q)^n = (q + p)^n = {}_n\mathrm{C}_0 q^n + {}_n\mathrm{C}_1 p\, q^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2} + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n p^n$
> となるんだよ。

この二項分布についても，期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，標準偏差 $D(X)$ を，これまで通りに計算してもいいんだけれど，今回はもっと簡単にアッという間に結果が出せるよ。次の公式をシッカリ覚えよう。

二項分布の計算

(1) 期待値　$E(X) = np$

(2) 分散　$V(X) = npq \quad (q = 1 - p)$

(3) 標準偏差　$D(X) = \sqrt{npq}$

これから，二項分布では，試行回数 n と，1 回の試行で事象 A の起こる確率 p がわかれば，$E(X)$，$V(X)$，$D(X)$ のすべてが決まる。よって，二項分布を $B(n, p)$ と表すことも覚えてくれ。

例題を 1 つやっておこう。コインを 3 回投げて，表の出る回数を確率変数 X とおく。試行回数は $n = 3$ だね。そして，1 回の試行で表の出る確率は $p = \frac{1}{2}$ であり，$X = r$ となる確率は，反復試行の確率：$P(X = r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$ $(q = 1 - p)$ だ。よってこの X の確率分布は，二項分布 $B\Big(\underset{n}{3}, \underset{p}{\frac{1}{2}}\Big)$ となる。

$q = 1 - p = \frac{1}{2}$ だから，X の期待値，分散，標準偏差は，上の公式を使えば，

期待値 $E(X) = np = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$　　分散 $V(X) = npq = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

標準偏差 $D(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

と，アッという間に求まるんだね。ちなみに，これを従来通りの計算法でやった例も右に書いておくから，結果が一致することを確認してくれ。

どう？ メンドウな計算をしなくていいから便利だろ？ それでは，これから絶対暗記問題にチャレンジしてみよう。

従来の計算法

$$\begin{cases} p = P(\mathrm{A}) = \frac{1}{2} & (\mathrm{A}：1\text{ 回の試行で，表が出る}) \\ q = 1 - p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$n = 3$，表の出る回数 $X = 0, 1, 2, 3$

確率分布

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

${}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3$　${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2$　${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1$　${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3+6+3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = \left(0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3+12+9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$D(X) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$E(XY)$, $V(X+Y)$ などの計算

絶対暗記問題 53	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

2 つの確率変数 $X = 1,\ 2,\ 3$ と $Y = 0,\ 2,\ 4$ の同時確率分布表を右に示す。

(1) X, Y の期待値 $E(X)$, $E(Y)$ と分散 $V(X)$, $V(Y)$ を求めよ。また, XY の期待値 $E(XY)$, および $X+Y$ の分散 $V(X+Y)$ を求めよ。

(2) 新たな確率変数 Z を $Z = 3X+2Y$ で定義する。Z の期待値 $E(Z)$ と分散 $V(Z)$ を求めよ。

X と Y の同時確率分布

X \ Y	0	2	4	計
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
計	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

ヒント! まず, X と Y が独立な確率変数であることを確認して, 公式 $E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$ や, $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ や $V(aX+bY) = a^2V(X)+b^2V(Y)$ を使うんだね。

解答&解説

2 つの確率変数 $X = 1,\ 2,\ 3,\ Y = 0,\ 2,\ 4$ について, X と Y の同時確率分布表より,

$$P(X=1,\ Y=0) = \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} = P(X=1)\times P(Y=0)$$

$$P(X=1,\ Y=2) = \frac{1}{24} = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} = P(X=1)\times P(Y=2)$$

$$P(X=3,\ Y=4) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = P(X=3)\times P(Y=4)$$

となるので, X と Y は独立な確率変数である。

これから, 公式:
$E(XY) = E(X)E(Y)$
$V(X+Y) = V(X)+V(Y)$
$V(aX+bY)$
$= a^2V(X)+b^2V(Y)$
が使える。

(1)・まず, X の確率分布表より, X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めると,

$$E(X) = 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1+4+9}{6} = \frac{7}{3} \quad \cdots\cdots①\cdots\cdots(答)$$

X の確率分布表

X	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$$V(X)=\underbrace{1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{2}}_{E(X^2)}-\underbrace{\left(\frac{7}{3}\right)^2}_{\{E(X)\}^2}$$

$\leftarrow$ $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=\frac{1+8+27}{6}-\frac{49}{9}=6-\frac{49}{9}=\frac{5}{9}$$ ……②……………………(答)

・次に，同様に Y の期待値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ を求めると，

Y の確率分布表

Y	0	2	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E(Y)=\cancel{0\times\frac{1}{2}}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$ …③…(答)

$$V(Y)=\underbrace{\cancel{0^2\times\frac{1}{2}}+2^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}}_{E(Y^2)}-\underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{\{E(Y)\}^2}$$

$\leftarrow$ $V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$

$$=5-\frac{9}{4}=\frac{11}{4}$$ ……④……………………………………………(答)

ここで，X と Y は独立な確率変数より

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{7}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{2}=\frac{7}{2}$$ (①，③より)………………(答)

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{5}{9}+\frac{11}{4}$$

$$=\frac{20+99}{36}=\frac{119}{36}$$ (②，④より)…………………………(答)

(2)・$Z=3X+2Y$ の期待値 $E(Z)$ と分散 $V(Z)$ を求めると，

$$E(Z)=E(3X+2Y)=3\underbrace{E(X)}_{\frac{7}{3}\ (①より)}+2\underbrace{E(Y)}_{\frac{3}{2}\ (③より)}$$

$\leftarrow$ $E(aX+bY)$
$=aE(X)+bE(Y)$

$$=7+3=10$$ ……………………………………………………(答)

$$V(Z)=V(3X+2Y)=3^2\underbrace{V(X)}_{\frac{5}{9}\ (②より)}+2^2\underbrace{V(Y)}_{\frac{11}{4}\ (④より)}$$

$\leftarrow$ $V(aX+bY)$
$=a^2V(X)+b^2V(Y)$

$$=5+11=16$$ ……………………………………………………(答)

二項分布 $B(n,\ p)$ の決定と確率

絶対暗記問題 54　難易度 ★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X の平均（期待値）が 6，分散が 2 とする。

(1) n，p の値を求めよ。

(2) $X = k$ となる確率を p_k とおく。$\dfrac{p_4}{p_3}$ を求めよ。

ヒント！ $X = k$ となる確率が ${}_nC_k p^k q^{n-k}$ となる二項分布 $B(n,\ p)$ の期待値は $E(X) = np$，分散は $V(X) = npq$ だね。この公式を使えば，条件から n，p の値がわかる。これより，(2) の p_3，p_4 もすぐ求まるだろう。

解答＆解説

(1) 二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X の期待値が 6，分散が 2 より，

期待値 $E(X) = \boxed{np = 6}$ ………①

分散　$V(X) = \boxed{npq = 2}$ ………②

また，$\boxed{p + q = 1}$ ………………③

② ÷ ①より　$\dfrac{\cancel{np}q}{\cancel{np}} = \dfrac{2}{6}$　$\therefore\ q = \dfrac{1}{3}$

これを③に代入して，$p + \dfrac{1}{3} = 1$　$\therefore\ p = \dfrac{2}{3}$

よって①より，$n \cdot \dfrac{2}{3} = 6$　$\therefore\ n = 9$

以上より，$n = 9$，$p = \dfrac{2}{3}$ ………………………………（答）

(2) (1) より，X は二項分布 $B\left(\overset{n}{\boxed{9}},\ \overset{p}{\boxed{\dfrac{2}{3}}}\right)$ に従うので

$$p_k = {}_nC_k p^k q^{n-k} = {}_9C_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{9-k}$$

確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき，$q = 1 - p$ として $p(X = k) = {}_nC_k p^k q^{n-k}$ だ！

$$\therefore\ \frac{p_4}{p_3} = \frac{{}_9C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^5}{{}_9C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^6} = \frac{\frac{9!}{4!5!}\times\frac{2^4}{3^9}}{\frac{9!}{3!6!}\times\frac{2^3}{3^9}} = 3$$ ………………………（答）

$$\frac{p_4}{p_3} = \frac{\frac{\cancel{9!}}{4!\times 5!}\times\frac{2^4}{\cancel{3^9}}}{\frac{\cancel{9!}}{3!\times 6!}\times\frac{2^3}{\cancel{3^9}}} = \underbrace{\frac{3!}{4!}}_{\frac{1}{4}}\times\underbrace{\frac{6!}{5!}}_{6}\times 2 = \frac{1}{4}\times 6\times 2 = 3$$ だね。

二項分布 $B(n,\ p)$ の決定と期待値

絶対暗記問題 55 難易度 ★★ CHECK1 CHECK2 CHECK3

確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従い，その分散は $\dfrac{8}{9}$ で，$X = n-1$ となる確率は，$X = n$ となる確率の 8 倍である。$n,\ p$ の値を求めよ。

ヒント！ 二項分布 $B(n,\ p)$ で，$X = n-1$ となる確率は ${}_n\mathrm{C}_{n-1}p^{n-1}q$，$X = n$ となる確率は ${}_n\mathrm{C}_np^n$ なので，題意より，${}_n\mathrm{C}_{n-1}p^{n-1}q = 8\times{}_n\mathrm{C}_np^n$ となるんだね。これと分散の公式 $V(X) = npq$，そして $p+q = 1$ を組み合わせればいいよ。

解答＆解説

二項分布 $B(n,\ p)$ の分散 $V(X) = npq$ より

$V(X) = \boxed{npq = \dfrac{8}{9}}$ ……①

二項分布 $B(n,\ p)$ では，
$P(X=k) = {}_n\mathrm{C}_kp^kq^{n-k}$
また，${}_n\mathrm{C}_{n-1} = {}_n\mathrm{C}_1 = n$
${}_n\mathrm{C}_n = {}_n\mathrm{C}_0 = 1$ だ。

また，$P(X = n-1) = 8P(X = n)$ より

${}_n\mathrm{C}_{n-1}p^{n-1}q = 8{}_n\mathrm{C}_np^n$，$np^{n-1}q = 8p^n$ 両辺を p^{n-1} で割って

$\boxed{nq = 8p}$ ……②　　また，$\boxed{p+q=1}$ ……③

②を①に代入して　$8p^2 = \dfrac{8}{9}$，　$p^2 = \dfrac{1}{9}$　　$\therefore\ p = \dfrac{1}{3}$　$(\because p>0)$

③より　$q = 1-p = \dfrac{2}{3}$　　②に代入して　$n\cdot\dfrac{2}{3} = 8\cdot\dfrac{1}{3}$　　$\therefore\ n = 4$

以上より　$n = 4,\ p = \dfrac{1}{3}$ ……………………………………………(答)

頻出問題にトライ・15 難易度 ★★★ CHECK1 CHECK2 CHECK3

1 回の試行で，事象 A の起こる確率が p である試行を n 回行う。ここで，k 回目の試行で A が起これば 1，起こらなければ 0 となる確率変数 X_k を定める。つまり，$X_k = 0,\ 1\ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であり，さらに確率変数 X を $X = X_1+X_2+\cdots+X_n$ で定めると，X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

(1) $E(X_k)$ と $E(X_k{}^2)$，および $V(X_k)$ を求めよ。

(2) (1) の結果から，$E(X) = np$，$V(X) = npq$　$(q = 1-p)$ を示せ。

（ただし，公式：$E(X_1+X_2+\cdots+X_n) = E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$，および $V(X_1+X_2+\cdots+X_n) = V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$ を用いてよい。）

解答は P194