補充問題 6 難易度 ★★★ CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

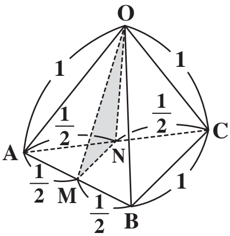
1 辺の長さが **1** である正四面体 **OABC** において，辺 **AB** の中点を **M**，辺 **AC** の中点を **N** とする。

(1) 三角形 **OMN** の面積を求めよ。

(2) **3** 点 **O**，**M**，**N** が定める平面を α とする。平面 α 上に点 **P** を，直線 **AP** が平面 α と直交するようにとる。線分 **AP** の長さ，および四面体 **OAMN** の体積を求めよ。 （首都大学東京）

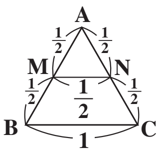
ヒント！ 図を描きながら解いていこう。**(1)** の二等辺三角形 **OMN** の面積はすぐに求められる。**(2)** では，四面体 **OAMN** の体積 V を求める際に，まず △**AMN** を底面として求め，次に△**OMN** を底面とし，**AP** を高さとして，V の式を作ると，**AP** が求まる。

(1) **1** 辺の長さが **1** の正四面体 **OABC** の辺 **AB** と **AC** の中点を **M**，**N** とおき，



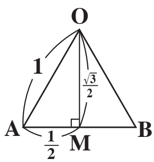
△**OMN** の面積を S_1 とおいて，これを求める。中点連結の定理より，

$$MN = \frac{1}{2}$$

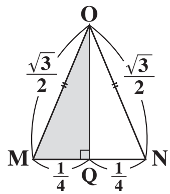


また，中線 **OM** と **ON** は等しく，右図より，

$$OM = ON = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



である。以上より，二等辺三角形 **OMN** の面積 S_1 は，**O** から辺 **MN** に下した垂線の足を **Q** とおき，直角三角形 **OMQ** に三平方の定理を用いて，



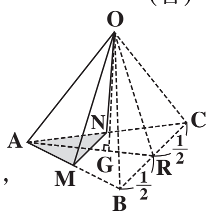
$$OQ = \sqrt{OM^2 - MQ^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{12-1}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4} \quad より，$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times MN \times OQ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{11}}{4} = \frac{\sqrt{11}}{16} \quad \cdots\cdots ①$$

である。 ……………………………(答)

(2) まず，右図に示すように，△**AMN** を底面積として，

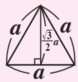


四面体OAMNの体積Vを求める。

△AMNは，1辺の長さが$\frac{1}{2}$の正三角形より，

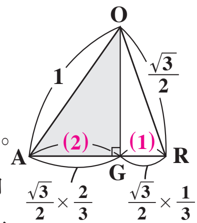
$$\triangle \mathrm{AMN} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{16} \cdots\cdots ②$$

1辺の長さaの正三角形の面積Sは，$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$である。



また，四面体OAMNの高さhは，Oから△ABCに下した垂線の足が正三角形ABCの重心Gとなるので，$h=\mathrm{OG}$となる。直線AGと辺BCとの交点をRとおくと，重心Gは，中線ARを2:1に内分するので，右図より，

$$\mathrm{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$ となる。



よって，直角三角形OAGに三平方の定理を用いると，

$$h = \mathrm{OG} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AG}^2}$$
$$= \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9-3}{9}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \cdots\cdots ③$$

よって，②，③より，

四面体OAMNの体積Vは，

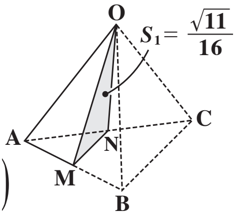
$$V = \frac{1}{3}\times\triangle \mathrm{AMN}\times h$$
$$= \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{16}\times\frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$= \frac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{3}\times 3\times 16} = \frac{\sqrt{2}}{48} \cdots\cdots ④$$

である。……………………………(答)

次に，右図に示すように，

△OMN（面積 $S_1 = \frac{\sqrt{11}}{16} \cdots ①$）

を底面積として，



四面体OAMNの

体積Vを求めると，

この高さh'は，点Aから平面α（平面OMN）に下した垂線の足がPより，$h' = \mathrm{AP}$となる。よって，

$V = \frac{1}{3}\times S_1 \times \mathrm{AP}$となる。①,④より，

$\frac{\sqrt{2}}{48}$（④より）

低面積 $S_1 = \frac{\sqrt{11}}{16}$（①より）

$$\frac{\sqrt{2}}{48} = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{11}}{16}\times \mathrm{AP}$$

∴求める線分APの長さは，

$$\mathrm{AP} = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{48}}\times\frac{\cancel{3\times 16}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{22}}{11}$$

である。……………………………(答)

(2)は，解答の順序が設問と逆になっているので，最後に，

$\mathrm{AP} = \frac{\sqrt{22}}{11}$ ……………………………(答)

四面体OAMNの体積 $V = \frac{\sqrt{2}}{48}$ ……(答)

としておく方がよいかもしれない。