● 波束は波数の矩形分布から生まれる！

それでは，波束を数学的に生み出す方法について，解説しておこう。ここで，利用するのは，次に示す“フーリエ変換”と“フーリエ逆変換”の公式なんだね。

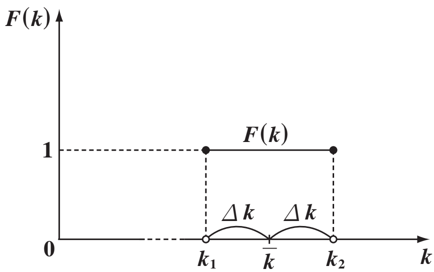
$$\begin{cases} (\mathrm{I})\ \text{フーリエ変換}：F(k)=F[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-ikx}dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*1) \\ (\mathrm{II})\ \text{フーリエ逆変換}：f(x)=F^{-1}[F(k)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}F(k)\,e^{ikx}dk \cdots\cdots(*2) \end{cases}$$

(Ⅰ)フーリエ変換では，$(*1)$ より関数 $f(x)\rightarrow$ 関数 $F(k)$ に変換し，
(Ⅱ)フーリエ逆変換では，$(*2)$ により関数 $F(k)\rightarrow$ 関数 $f(x)$ に逆変換する。
ここで，x は，波動関数 $f(x)$ の位置を表し，k は波数を表すものとする。
そして，この波数 k の関数 $F(k)$ が次に示すような矩形波(くけいは)であるとき，
$f(x)$ は波束を表す波動関数となることを，これから示そう。

図 1 に示すように，波数 k の関数 $F(k)$ が，次のような矩形波であるものとしよう。

$$F(k)=\begin{cases} 1 & (k_1\leqq k\leqq k_2) \\ 0 & (0<k<k_1,\ \ k_2<k) \end{cases}$$

図 1　矩形波 $F(k)$



これに対応する実数の波動関数を $f(x)$ とおくと，$F(k)\rightarrow f(x)$ のフーリエ逆変換の公式 $(*2)$ を用いて，$f(x)$ を次のように求めることができる。

$$f(x)=F^{-1}[F(k)]=\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}F(k)\cdot e^{ikx}dk}_{\displaystyle \| }$$

$$\boxed{\underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{k_1}0\cdot e^{ikx}dk}}_{\displaystyle 0}+\int_{k_1}^{k_2}1\cdot e^{ikx}dk+\underbrace{\cancel{\int_{k_2}^{\infty}0\cdot e^{ikx}dk}}_{\displaystyle 0}}$$

よって，$f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{k_1}^{k_2}e^{ikx}dk$ ……① となる。

ここで，k_1 と k_2 は比較的近い値とし，その平均値を $\bar{k}$，その差を $2\cdot\Delta k$ とおくと，$\bar{k}=\dfrac{k_1+k_2}{2}$，$\Delta k=\dfrac{k_2-k_1}{2}$　$(k_1=\bar{k}-\Delta k,\ k_2=\bar{k}+\Delta k)$ となる。

よって，①をさらに変換すると，

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\bar{k}-\Delta k}^{\bar{k}+\Delta k}e^{ikx}dk=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{ix}\left[e^{ikx}\right]_{\bar{k}-\Delta k}^{\bar{k}+\Delta k}$$

$$=\frac{1}{\pi x}\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{i(\bar{k}+\Delta k)x}-e^{i(\bar{k}-\Delta k)x}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi x}\cdot\underbrace{\frac{e^{i\cdot\Delta kx}-e^{-i\cdot\Delta kx}}{2i}}_{\sin\Delta kx}\cdot\underbrace{e^{i\bar{k}x}}_{\cos\bar{k}x+\cancel{i\sin\bar{k}x}}$$

・$\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$

・オイラーの公式
$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$f(x)$ は実数関数なので，純虚数項は無視する。

$$\therefore f(x)=\underline{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\Delta kx}{x}}\cdot\underline{\cos\bar{k}x}\ \cdots②$$ となる。(ただし，$\bar{k}\gg\Delta k$ とする。)

波長の短い波動成分

全体の波束を表す波長の長い関数。これを $A(x)$ とおくと，

$$\lim_{x\to 0}A(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta k}{\pi}\cdot\underbrace{\frac{\sin\Delta kx}{\Delta kx}}_{1}=\frac{\Delta k}{\pi}$$

公式：$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

ここで，$A(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\sin\Delta kx}{x}$ と

$A(0)=\dfrac{\Delta k}{\pi}$ と定義すれば，$A(x)$ は $x=0$ でも連続な関数となる。

おくと，$A(x)$ が波束を形成する波長の長い関数を表す。ここで，$\Delta k=1$，$\bar{k}=12$ $(k_1=11,\ k_2=13)$ とすると，②は，

$$f(x)=\underbrace{\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin x}{x}}_{A(x)}\cdot\cos 12x$$

$$=A(x)\cdot\cos 12x\ \cdots\cdots②'$$

となる。この②′は，波束を表す大きな波長の波 $A(x)$ とその中に存在する波長の短い波動 $\cos 12x$ から成り立っているんだね。

図 2　波束の例 ($\Delta k=1$，$\bar{k}=12$)